目　录

第一章　概论……………………………………………………………………………（1）
第一节　应用计算流体力学发展的简单回顾……………………………………………（2）
第二节　数值模拟是流体力学发展和工程应用的重要工具……………………………（5）
参考文献……………………………………………………………………………………（6）
第二章　理论基础知识……………………………………………………………………（7）
第一节　非线性守恒系统基本概念,Euler 方程…………………………………………（7）
第二节　双曲性与适定性…………………………………………………………………（10）
一、双曲性 …………………………………………………………………………………（10）
二、适定性 …………………………………………………………………………………（11）
第三节　特征线与黎曼不变量……………………………………………………………（12）
一、特征向量与矩阵的对角化 ……………………………………………………………（12）
二、特征线与古典黎曼不变量 ……………………………………………………………（13）
三、Lax-黎曼不变量,简单波 ……………………………………………………………（13）
第四节　弱解,黎曼问题 …………………………………………………………………（15）
一、Bürgers 方程的弱解 …………………………………………………………………（15）
二、一般系统弱解的定义 …………………………………………………………………（17）
三、黎曼问题 ………………………………………………………………………………（17）
第五节　熵条件……………………………………………………………………………（19）
第六节　边界条件…………………………………………………………………………（21）
一、边界的选取 ……………………………………………………………………………（21）
二、一般边界条件的构造要求 ……………………………………………………………（21）
三、Euler 方程的边界条件 ………………………………………………………………（23）
第七节　高维问题…………………………………………………………………………（25）
参考文献……………………………………………………………………………………（26）
第三章 Euler 方程和 N-S 方程的数值计算方法 ………………………………………（27）
第一节　中心型差分格式…………………………………………………………………（27）
一、标量人工粘性的中心差分方法 ………………………………………………………（28）
二、各向异性的人工粘性 …………………………………………………………………（33）
三、矩阵人工粘性模型 ……………………………………………………………………（37）
第二节　迎风型通量分裂方法……………………………………………………………（43）
一、矢通量向量分裂法 ……………………………………………………………………（43）
（一）完全气体的可压 N-S 方程 …………………………………………………………（43）
（二）雅可比系数矩阵分裂 ………………………………………………………………（45）
（三）Steger-Warming 矢通量分裂法 ……………………………………………………（46）
（四）Van Leer 分裂格式 …………………………………………………………………（47）

（五）MUSCL 方法 …………………………………………………………（48）
（六）求解 N-S 方程的改进 Van Leer 格式……………………………………（49）
（七）迎风偏置格式 …………………………………………………………（51）
（八）限制器 …………………………………………………………………（52）
（九）三维算例 ………………………………………………………………（54）
二、通量差分裂方法 …………………………………………………………（58）
（一）黎曼解方法 ……………………………………………………………（58）
（二）Roe 的近似黎曼解方法 ………………………………………………（58）
（三）Roe 的一阶迎风格式 …………………………………………………（62）
（四）一维非线性守恒系的 Roe 方法 ………………………………………（62）
（五）Roe 的迎风偏置通量差分裂方法 ……………………………………（63）
（六）数值算例 ………………………………………………………………（63）
第三节　TVD 格式 ……………………………………………………………（66）
一、TVD 的概念 ………………………………………………………………（67）
二、单调格式、保单调格式和 TVD 性质的充分条件…………………………（67）
三、显式一阶 TVD 格式举例 …………………………………………………（69）
四、高阶 TVD 格式的构造 ……………………………………………………（70）
（一）反扩散方法 ……………………………………………………………（70）
（二）数值脉动法——Roe-Sweby 二阶 TVD 格式 …………………………（73）
（三）通量修正法——Harten 格式 …………………………………………（73）
（四）MUSCL 方法 …………………………………………………………（75）
（五）Osher 和 Chakravarthy TVD 格式……………………………………（75）
（六）高阶对称 TVD 格式……………………………………………………（76）
（七）无波动、无自由参数的高分辨率格式（NND）…………………………（78）
五、对一维方程组和多维空间方程组的扩广 …………………………………（80）
（一）向一维方程组推广 ……………………………………………………（80）
（二）对多维方程组的推广 …………………………………………………（81）
六、数值算例 …………………………………………………………………（81）
第四节　ENO 格式 ……………………………………………………………（86）
第五节　对时间的积分…………………………………………………………（87）
一、隐式近似因子分解方法 …………………………………………………（87）
二、LU 分解方法 ……………………………………………………………（88）
参考文献…………………………………………………………………………（89）
第四章　网格生成技术…………………………………………………………（92）
第一节　单域结构（贴体）计算网格的生成……………………………………（92）
一、代数生成方法 ……………………………………………………………（92）
二、椭圆型微分方程生成方法 ………………………………………………（93）
（一）Thompson 和 Sorenson 法 ……………………………………………（95）
（二）Thomas 和 Middlecoff 法 ……………………………………………（96）

(三) Hilgenstock 法 …… (96)
三、双曲型微分方程生成方法 …… (97)
第二节　分区对接网格 …… (98)
一、分区对接网格的生成步骤 …… (98)
二、分区对接网格生成技术发展简介 …… (101)
三、新一代分区对接网格技术的特点 …… (102)
第三节　分区重叠网格 …… (104)
一、子域的划分和重叠网格的结构 …… (105)
二、重叠区和人工内边界的建立 …… (105)
(一) 洞边界的确定 …… (107)
(二) 信息的传递——插值 …… (107)
三、流场解的修改 …… (108)
第四节　非结构网格 …… (109)
一、Delaunay 三角化方法 …… (110)
(一) 节点的生成 …… (110)
(二) 三角化方法 …… (110)
(三) 退化的处理 …… (113)
(四) 网格的优化 …… (114)
(五) Delaunay 方法的发展 …… (114)
二、推进阵面法 …… (115)
(一) 布置控制点和生成背景网格 …… (115)
(二) 定义边界和阵面初始化 …… (115)
(三) 推进生成三角形 …… (116)
(四) 网格的优化 …… (117)
三、两种方法的讨论 …… (117)
四、结构/非结构杂交网格 …… (117)
第五节　自适应笛卡尔网格 …… (121)
一、方法的基本特点 …… (122)
二、网格生成过程 …… (123)
三、各向异性的笛卡尔网格 …… (123)
第六节　结束语 …… (124)
参考文献 …… (124)
第五章　湍流模型及其对数值模拟的作用 …… (127)
第一节　复杂流动的湍流模型 …… (127)
第二节　简化湍流模型及其发展 …… (130)
一、Baldwin-Lomax(BL)模型 …… (130)
二、Johnson-King(JK)非平衡代数模型 …… (131)
(一) JK 模型的要点 …… (132)
(二) JK1990A …… (133)

(三) JK1990J ………………………………………………… (134)
(四) JK1992 ………………………………………………… (134)
三、Baldwin-Barth(BB)一方程模型 ……………………………… (135)
四、Spalart-Allmaras(SA)一方程模型……………………………… (136)
第三节　简化湍流模型的应用举例 ……………………………… (137)
一、多段翼型的绕流 ………………………………………… (137)
二、翼型的动失速和非定常运动 ……………………………… (145)
(一) 湍流模型非平衡性的影响 ……………………………… (145)
(二) 一方程模型和二方程模型的对比计算 …………………… (147)
(三) 转捩的影响 ………………………………………… (155)
三、三维机翼的绕流 ………………………………………… (155)
第四节　结束语 ……………………………………………… (162)
参考文献 …………………………………………………… (163)
第六章　分区与并行计算 ……………………………………… (165)
第一节　可压流几何分区计算 ………………………………… (165)
一、前言 …………………………………………………… (165)
二、分区网格的拓扑结构与归类 ……………………………… (165)
(一) 区域分解 …………………………………………… (165)
(二) 对接网格 …………………………………………… (166)
(三) 重叠网格 …………………………………………… (166)
三、分区计算的耦合条件 …………………………………… (167)
(一) 显式格式的耦合条件 ………………………………… (168)
(二) 隐式差分格式的耦合条件 ……………………………… (169)
四、多维问题耦合条件 ……………………………………… (171)
(一) 对接网格 …………………………………………… (171)
(二) 重叠网络 …………………………………………… (173)
(三) 重叠-对接混合网格 ………………………………… (174)
五、分区计算的理论问题 …………………………………… (175)
(一) 理论基础 …………………………………………… (176)
(二) 各种耦合条件的特性 ………………………………… (177)
第二节　并行算法 …………………………………………… (179)
一、并行计算机结构 ………………………………………… (179)
(一) Flynn 分类法 ……………………………………… (179)
(二) MIMD 系统的内存组织形式……………………………… (179)
(三) 几种并行系统 ……………………………………… (181)
二、并行计算机编程 ………………………………………… (182)
(一) 内存共享编程模式 …………………………………… (182)
(二) 内存分布编程方式 …………………………………… (182)
三、并行性能参数 …………………………………………… (183)

四、网格分区并行处理 …… (184)
(一) 引言 …… (184)
(二) 数据交换时耗分析 …… (185)
(三) 负载不平衡分析 …… (187)
(四) 并行算法的数值效率 …… (187)
参考文献 …… (189)
第七章 工程应用举例 …… (191)
第一节 非定常大迎角的复杂流动计算 …… (191)
一、对称与非对称流动 …… (191)
二、非定常计算 …… (193)
三、F-15 全机的计算 …… (196)
四、前体涡控制的计算 …… (196)
第二节 内外流一体化数值计算 …… (196)
第三节 跨超声速计算 …… (201)
第四节 YAV-8B 全机近地面绕流 …… (202)
第五节 飞机带外挂物及外挂物分离时绕流的计算 …… (203)
第六节 非常复杂组合体外形的绕流计算 …… (206)
第七节 操纵面偏转时三维绕流的计算 …… (208)
第八节 导弹流场的数值计算 …… (214)
第九节 结束语 …… (216)
一、计算流体力学在航空航天领域中应用的地位与作用 …… (216)
二、程序验证和确认是使数值模拟方法成为有效计算工具的必要条件 …… (217)
三、发展大规模并行计算的有效算法 …… (218)
四、计算流体力学中的计算可视化问题 …… (220)
参考文献 …… (221)

第一章 概 论

现代流体力学中新兴的学科分支——计算流体力学在近20年～30年中的发展非常迅速。本世纪初期，许多著名的流体力学家发现了流体力学基本物理规律，找到了恰当的分析方法并求得了一系列解析解(大多限于线性问题)，从而推动了本世纪以来的工业发展及流体力学自身的发展。流体力学涉及的物理现象是多方面的，如激波、湍流，旋涡、非定常运动等。他们研究了这些基本现象，建立了相应的主控方程和边界条件，将问题转化为如何结合工程实际来求解这些方程组，从而奠定了计算流体力学的理论基础。但工程实际中绝大多数流体力学问题是非线性的力学问题，求得其精确解或解析解是十分困难的。已经找到的基本方法和各类解析解都是在各种简化，假设条件下得到的，无法描述大量存在的各类复杂的流动现象。30年代后期出现了第一代电子数字计算机，随着高速电子计算机的迅速发展，人们试图用数值计算方法直接求解各类主控方程和边界条件来解决具有强烈非线性特征的大量流动现象，工业界也要求采用数值模拟手段来解决各类设计和计算问题，从而形成并发展了计算流体力学这一学科分支。

计算流体力学的发展是伴随着计算机技术的发展而前进的，后者是构成前者的基础。只有计算机的速度、内存和外围设备达到一定程度时才会有计算流体力学发展新阶段的出现，应用计算流体力学更是如此。例如60年代出现的"第三代"计算机及其随后的改进发展，使计算机的计算能力发生了一个飞跃。相应地，飞机设计部门开始广泛采用面元法，标志着计算流体力学开始在工业生产中的应用和服务。一个人工计算需100年方能完成的题目在50年代用IBM-650需100 h完成，70年代用IBM-370只需10 min，到80年代用Cray-1则仅需1 min即可完成。以向量化结构为主的巨型机的出现使飞机设计中可以使用Euler方法，从而可以给出非线性影响的定量结果。虽然根据对已有的几十个常规应用软件的统计，60%～88%左右的标量计算可以被向量化，也已表明向量计算的加速比一般可达4～8，但是，单纯依靠提高计算机单机性能的潜力毕竟有限，对于超大型计算问题，如粘性流动计算在工业界中的应用，所需之加速比的提高是以数量级为单位的，单纯的向量机不足以满足要求。并行化，大规模并行机和网络并行机群已是90年代中期，以至2000年以后人们研究的中心，也是应用计算流体力学发展的希望。

计算流体力学是多领域交叉的学科，涉及计算机科学、流体力学、偏微分方程的数学理论、计算几何、数值分析等学科。这些学科的交叉融合，相互促进和支持，推动着这些学科的深入发展。

流体力学(空气动力学)研究的应用目标是：

1. 提供高质量、短周期的设计、分析和试验的工具；
2. 提供能提高系统效率、环境、运行和性能要求的流动控制的新概念。

应用计算流体力学是流体力学的一部分，其研究自然也直接针对上述二目标。为达到此目标，无论是研究探讨流动机理还是解决工程实践中的流体计算，首先要能高效、准确地计算和描述复杂流动的细节。

至今尚无人对复杂流动给过确切的定义，但顾名思义应指流动现象的结构都比较复杂的那类流动。据笔者理解，复杂流动包括下述两大类流动。

一类是物体几何形状很复杂，使绕物体的流动中存在很多物理现象，且彼此相互作用，使流场中的流动结构很复杂，流场特性的变化规律也很复杂。对这类流动无论用实验手段还是用数值模拟

手段来研究都具有相当的难度。例如现代飞机的外形就非常复杂，不仅有任意曲率的曲面构形和众多部件之间的光滑连接，还有大量的外挂物和凸起物。寻找描述这种外形的数学模型是一种庞大、细致、并且难度相当大的工作。绕如此复杂外形的流动就可能包含着流体力学研究的众多物理现象——旋涡、激波、剪切层、分离、转捩等——及它们之间的相互作用。因此研究这种流场的特性是十分困难的。图 1-1 为一般现代超声速战斗机的外形，其细长前机身虽形状较简单，但在中等或大迎角飞行时将会引起分离涡，在较大迎角时，这种分离涡即使是对称飞行也会出现不对称的特性，它们会对机翼和尾部的流动产生很大的影响而引起飞行特性的巨大变化；机翼和机身连接处的大边

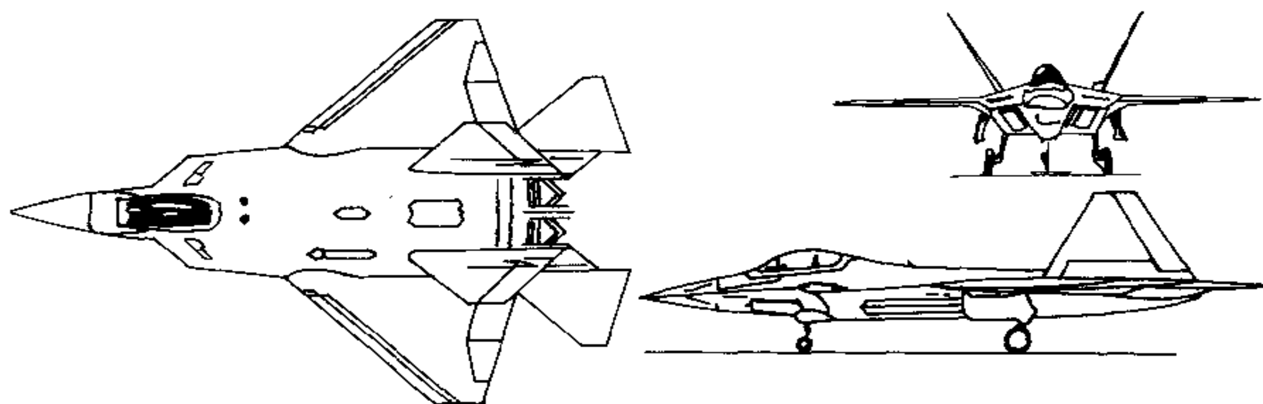


图 1-1　洛克希德 YF-22 的外形

条也会引起前缘分离涡，此前缘分离涡必然会与前机身的分离涡相互作用，它们又进一步与机翼的绕流相互作用；飞机在跨声速飞行时机翼上会发生激波，甚至是强激波，此激波与机翼的边界层相互作用，可能使边界层流动发生分离；飞机尾部因有发动机尾喷口、平尾、立尾及各种操纵舵面而使几何形状很复杂，绕各部件的流动又互相干扰，因此尾部绕流流动的复杂性可想而知；战斗机的发动机位于机身内部，其来流由进气道提供，进气的质量影响整个推进系统的效率，然而进气道必然紧贴机身或机翼而造成绕飞机的外流与绕推进系统的内流相互结合，相互影响；现代战斗机还带有较多的外挂武器，更增加了绕飞机流动的复杂程度。

另一类复杂流动的物体几何形状并不复杂，但绕流流动中却存在着很复杂的流动现象及各种现象的相互作用，二维外形相对三维外形要简单得多，但绕二维物体的流动也常存在复杂的流动现象，如绕二维多段翼型的流动。图 1-2 给出了二维多段翼型的外形及其绕流中可能存在的物理现象。在超声速和高超声速情况下，绕较简单几何外形的流动中也可能存在包括激波及激波/激波、激波/剪切层等的相互干扰，图 1-3 给出了这种情况的典型例子。随飞行 *Ma* 数的进一步提高，流动中因温度提高而出现的各种非平衡物理作用和化学反应将使流场进一步复杂化。

本书基本内容是从应用角度讨论数值求解 Euler 和 N-S 方程的基本方法及相应的问题，并用于计算复杂流场。

第一节　应用计算流体力学发展的简单回顾

计算机问世前，虽然有些先驱者探讨过用数值计算方法求解流动问题，但只能在计算方法上做出有意义的研究成果。例如 Richardson 在 1910 年提出了解拉普拉斯方程的点叠代格式，此外他将

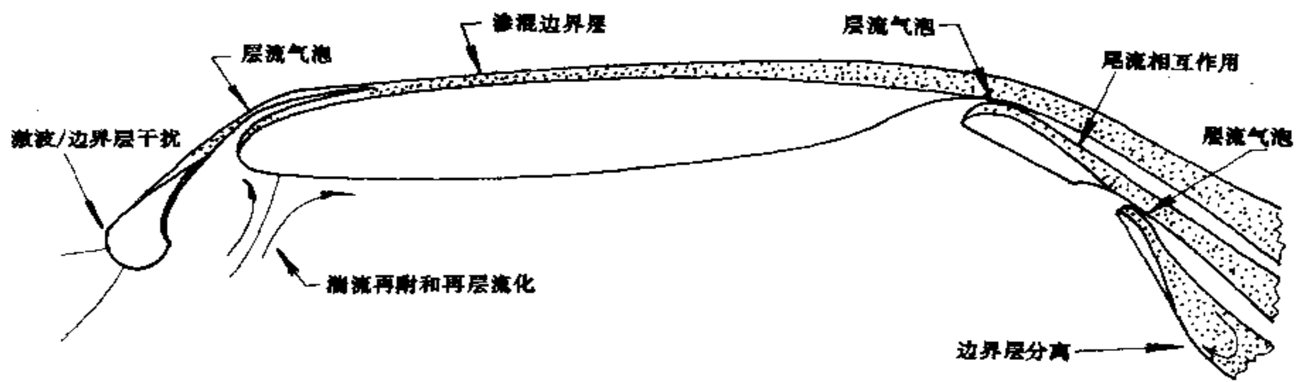


图 1-2　多段翼型外形和流动现象

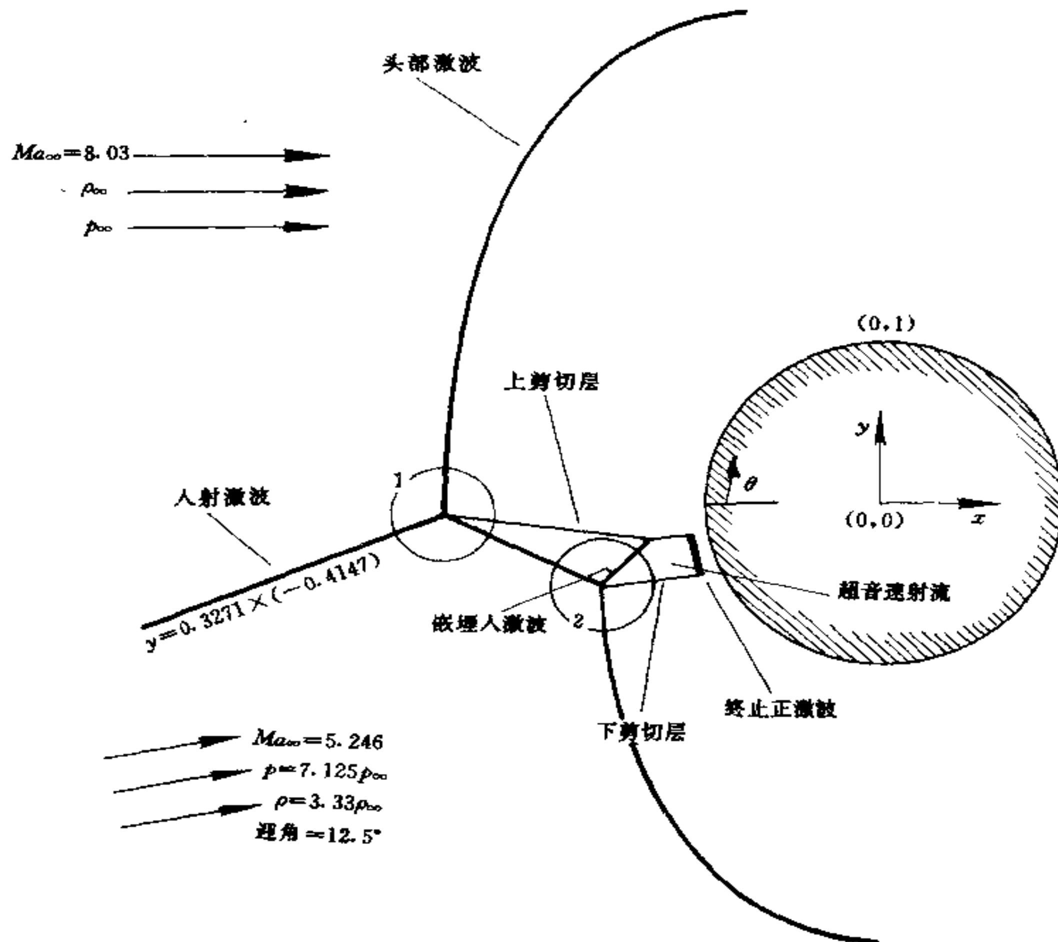


图 1-3　一种超声速的复杂流动

“推进”的问题和必须用“松驰”格式来解的问题区别开来，提出了解 Laplace 方程的松驰技术；随后又有 Liebmann，Southwell 等改进了松驰格式使松驰法在 40 年代～50 年代被广泛应用于求解流

体和固体力学问题。应该特别提到 Courant,Friedrichs 和 Lewy 的重要工作,他们证明了连续的椭圆型,抛物型和双曲型方程组解的存在性和唯一性定理;针对线性方程的初值问题,首先将偏微分方程离散化,然后证明了离散系统收敛到连续系统,最后用代数方法确定了差分解的存在。他们还讨论了双曲型方程的特征性,提出了特征线方法,给出了著名的稳定性判别条件——CFL 条件。这些工作,结合其他一些数学家研究的偏微分方程数学理论,构成了有限差分方法的数学理论基础。随后 Von Neumann,Richtmyer,Lax,Олейник 等研究并建立了非线性双曲型方程守恒律的数值方法理论,特别是弱解的理论,为含有激波及其它间断的气体流动数值模拟打下了理论基础。Von Neumann 还提出了一种时间推进问题数值方法线性稳定性的分析方法提供了分析线性稳定性问题的较简单的实用的方法,直到目前在计算流体力学中分析线性稳定性时仍广泛地使用着这种方法。随后 Lax,Kreiss 等给出的非定常偏微分方程差分逼近的稳定性理论,进一步促进了双曲型方程或双曲-抛物型方程时间相关方法的发展。时间相关法的基本思想是从非线性 Euler 或 N-S 方程出发,利用双曲型或双曲-抛物型方程的数学特性,沿时间方向推进求解,由此得到对于时间 t 趋近于无穷大的渐近解即为所要求的定常解。此方法既能取得流动定常解,又能模拟流体运动的非定常过程;若流场中存在间断面——激波,它能自动捕捉到激波,因而是应用范围极广的一般性方法。关于激波捕捉,Lax 在 1954 年首先提出了一种采用守恒形式的主控方程而不对激波作特殊处理的计算带有激波流动的方法,Von Neumann 和 Richtmyer 则明确提出用人工粘性的办法计算带激波的流动,他们这些工作是"激波捕捉"法的起源。随后 Godonov 提出了迎风格式,Lax 和 Wendroff 提出了二阶精度的差分格式,改进了计算带激波流动的精度。与激波捕捉技术发展的同时,Gray 提出了激波拟合技术的想法,可避免激波捕捉技术中激波被抹平的缺点。Moretti 等应用和发展了这种技术,计算了多维超声速流动。但相比于激波捕捉法,其计算要复杂得多,因而目前主要还是应用前者计算带有激波的流动。

在发展非线性双曲型方程数值解法的同时,Franhal 提出了解 Laplace 方程的逐次超松弛(*SOR*)方法,大大改进了收敛速度。Peaceman 和 Rachford,Douglas 等发展了求解抛物型和椭圆型方程的隐式方法,采用交替变换迭代方向和不受限制的时间步长,把无条件稳定性和计算简便性结合了起来,这就是目前广泛使用的交替方向的隐式(*ADI*)格式。

从 60 年代开始计算机技术的迅速发展,不仅促使计算流体力学研究工作的成果和发表的文献在数量上日益增多,而内容更为广泛,更为突出的是计算流动力学开始在工业界得到应用、实现了应用计算流体力学的第一阶段——线性计算流体力学,其表现形式是面元法的应用。应用范围为小迎角状态的低速、亚声速和超声速流动。从 60 年代中期到 80 年代初期,各航空公司都发展了各自功能比较齐全、比较完善的整套面元法计算软件,可以处理全机带各类外挂物的几何形状十分复杂的绕流计算,还可以进行各类几何参数优化及反设计计算。面元法的计算快速性和易使用性使之在现代飞机设计中一直起着重要的作用,成为飞机设计中不可缺少的一种有效设计工具。

无粘非线性方程数值求解的突破开始于 70 年代。1970 年 Murmann 和 Cole 提出了解小扰动速势方程的型相关方法,即在亚声速区用中心差分格式,在局部超声速区用一侧差分格式来建立跨声速流中混合型的差分方程,再用线松弛法求解此差分方程,数值模拟了带激波的跨声速绕流流场。这是计算跨声速流场的一个重大突破,开辟了计算跨声速流场的新领域。随后 Jameson 提出了旋转格式,进一步将型相关方法推广到全位势方程。Bailay,Balhaus,Steger 和 Bippe 等相继计算了三维机翼、翼身组合体和全机的跨声速位势流场。Balhaus,Lomax 和 Steger 等又提出了隐式近似因子分解法(AF 格式),其收敛速度大大超过了松弛迭代法的收敛速度;他们并用此方法求解了非定常跨声速流动。可以说,70 年代在计算流体力学中取得重大成功的一个领域是较全面地解决了

跨声速位势流的数值计算方法问题。全位势方法加上用边界层方法计及粘性影响而形成的高 Re 数下粘流/无粘流相互作用的计算方法是计算只有微弱激波流场的较好计算模型，是飞机设计中计算设计状态的一种经济、准确、有效的方法，因而目前已大量应用于工程实践。近几年来，波音公司几乎 2000 次/年地使用全位势加边界层的耦合方法来解决大量的设计问题。

70 年代以来计算流体力学取得重大成功的另一领域是采用时间相关方法求解可压缩 Euler 和 N-S 方程以及数值模拟复杂流场的研究工作。1969 年 Mac Cormack 提出用二步显式格式求解可压流 N-S 方程组。1975 年 Beam 和 Warming 用隐式近似因子分解法求解 Euler 方程，随后又推广泛求解 N-S 方程。在相当一段时间内都是采用此类差分方法求解 Euler 和 N-S 方程来解决跨声速和超声速的复杂流场问题的。这些经典差分格式对激波模拟的分辨率不高，且在激波处易产生伪振荡。针对正确的数值模拟流场中的激波这一目标，经过十年多的努力，计算流体力学工作者发展了相当数量的高精度、高分辨率差分格式，如总变差减小(TVD)格式，基本无振荡(ENO)格式，无波动、无自由参数的耗散(NND)格式，耗散比拟方法，界值为限(MmB)格式以及矢通量分裂和通量差分裂格式等，形成了第二代差分格式。这些格式可以模拟包含激波、旋涡等现象的非光滑流场。90 年代以来，为进一步提高对粘性流场的分辨率，人们正努力研究和发展更高精度(二阶以上)的计算格式和方法。

从应用计算流体力学角度来看，网格生成技术具有不容忽视的作用，这也是计算流体力学近 20 多年来一个取得较大进展的领域。1974 年 Thompson 等提出采用求解椭圆型方程方法生成贴体网格，在网格生成技术的发展上起到了开创作用。随后 Steger 等又提出采用求解双曲型方程方法生成贴体网格。但直到 80 年代中期，对比计算格式和方法的飞跃发展，网格生成技术未能与之保持同步地发展。因而自 80 年代开始，各国计算流体和工业界都十分重视网格生成技术的研究，发展了如多块对接网格技术和多域重叠网格技术等，并在此基础上产生了 90 年代的以 ICEM 软件为代表的新一代分块结构网格方法，具有与 CAD 接口的功能。因而较容易生成非常复杂外形的 CFD 计算网格。90 年代以来迅速发展的非结构网格和自适应笛卡尔网格等方法，使复杂外形的网格生成技术呈现出了更加繁荣发展的局面。网格生成技术已成为计算流体力学的一个重要分支。现已培养出了一大批专职研究队伍，产生了一大批实用软件。正是网格生成技术的迅速发展，才实现了流场解的高质量，使工业界能将 CFD 的研究成果——求解 Euler 方程方法应用于型号设计中。

第二节　数值模拟是流体力学发展和工程应用的重要工具

计算流体力学分支的形成和发展绝不是流体力学发展的全部。数值模拟方法不能代替风洞实验和飞行试验，也不能代替理论分析方法。确切地说，各种研究手段和方法必须互相配合，互相补充，互相促进，共同推进流体力学学科的发展和解决各种工程实践问题。

理论分析方法在研究流体运动规律的基础上提出各种简化流动模型，建立各类型主控方程。在一定假设和条件下，经过系列的解析推导和运算，得到问题的解析解。其最大特点是往往可以给出带普遍性的信息，在很多情况下可得到封闭的、简单的公式，因此可以用最小的代价和时间给出规律性的结果或变化趋势。理论分析的很多方法仍是目前解决实际问题，主要是在初步设计阶段中，常常采用的方法。但理论分析方法常常无法用于研究复杂的、以非线性为主的流动现象。

长期以来，地面实验(风洞实验)方法是研究流动机理、分析流动现象、探讨并获得流动新概念、推动流体力学发展的主要研究手段，并为航空航天飞行器的设计提供气动力数据，是获得和验证新气动力现象的主要方法。在今后相当长时期内仍将是飞行器研制的重要依赖手段。其主要问题是：

要实现一个完整的实验过程需要解决一系列复杂的技术问题，所需周期长，费用也很高。随着科学技术的发展，实验技术虽然也有了很大的进步，但有些现象，如高超声速流动中真实气体的非平衡效应等某些重要现象，仍是地面模拟设备无法模拟的，只能采用数值模拟和地面实验相结合的办法来研究。即使在亚跨声速领域内，随飞行器外形的愈益复杂，各种相互干扰影响的作用愈益重要，使用迎角的扩大，非定常效应的参与等，也对地面模拟实验提出了前所未有的严峻考验。

数值模拟方法的特点是可以给出流体运动区域内的离散解，而非解析解，从一次数值解中无法看出来流参数变化引起的变化趋势，这是其与理论分析方法的一个重要区别。但它可以以比地面实验所需的花费少得多地给出流场内细节的定量描述，且若数值模拟方法的数学提法(包括主控方程和边界条件)是正确的，则可在较广泛的流动参数(如 Ma、Re、飞行高度、气体性质等)范围内较快地给出流场的定量结果，而不受实验中固有的约束条件(如洞壁干扰、支架干扰等)的影响，这是其与风洞实验的一个重要差异。当然要建立正确的数学提法必须和实验研究相结合。此外，实际问题中抽象出来的数学提法往往是十分复杂的多维非线性偏微分方程组，其数值解的数学理论尚研究得不够充分，如严格的稳定性分析、误差估计、收敛性和唯一性等理论的发展还跟不上数值模拟的进展，因而也往往需要进行数值实验，并与地面实验、物理分析相结合来验证数值解的可靠性。

可见，各种研究手段必须有机地结合才能尽快地推动流体力学的发展，多快好省地解决各类工程实践问题。由于计算流体力学和计算机科学的迅速发展，数值模拟方法在解决流体力学问题中的地位和作用得到了有力的改变。例如美国 Northrop 公司在研制新一代 ATF 战斗机 YF-23 及前一代型号(第三代歼击机)YF-17 进程中，风洞实验作用相对减少的情况可作为一个实例，表明数值模拟和风洞实验在现代飞机设计中地位与作用的相对变化。从 1966 年到 1974 年(第一次试飞)YF-17 的研制周期中，共进行了近 13 500 小时的风洞实验；而从 1982 年到 1990 年(第一次试飞)，对性能要求更高，外形更复杂的 YF-23 研制期间，由于数值模拟方法参与了设计与修改，用了近 15 000 小时的计算机时，而只进行了近 5 500 小时的风洞实验，减少了约 60%的地面实验工作量，缩短了研制周期，节省了大量实验费用，大大降低了成本，减少了风险，并获得了优异的设计性能。

参考文献

[1] Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics And Heat Transfer. Hemisphere Pub. Corp., 1984
[2] Fletcher C A J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1988
[3] Hirsch C. Numerical Computation of Internal And External Flows. John Wiley & Sons, 1988
[4] Richtmyer R D, Morton K W. 初值问题的差分方法(袁国兴等译). 广州：中山大学出版社，1992
[5] 傅德薰. 流体力学数值模拟. 北京：国防工业出版社，1993
[6] 马铁犹. 计算流体动力学. 北京：北京航空学院出版社，1986
[7] 徐华舫，张炳暄，朱自强. 亚超声速定常位流的面元法. 北京：国防工业出版社，1981
[8] 朱自强，陈炳永，李津. 现代飞机设计中的空气动力学. 北京：北京航空航天大学出版社，1995
[9] 孙家昶，张林波，迟学斌，汪道柳. 网络并行计算与分布式编程环境. 北京：科学出版社，1996
[10] MacCormack R W. A Perspective on A Quarter Century of CFD Research. AIAA 93-3291
[11] Thompson J F, Weatherill N P. Aspects of Numerical Grid Generation: Current Science And Art. AIAA 93-3539

第二章　理论基础知识

流体力学基本方程可以分为可压与不可压两类，也可分为无粘(Euler 方程)与粘性(N-S 方程)两类，由于：

(*a*) 不可压流的基本方程可以看成是可压流基本方程在小 *Ma* 下的极限；通过引进人工可压缩性可以将不可压方程转化成具有可压流方程同样形式后求解。

(*b*) N-S 方程与 Euler 方程相比只多了一些具有线性形式的耗散项，后者的计算相对简单，不存在实质性的新困难。

所以，本章只介绍有关无粘可压缩流动 Euler 方程的一些基础理论知识。尽管如此，不可压流与粘流又有其特殊的方面，描述这些流动的方程与 Euler 方程数学上性质不尽相同，而且粘流还涉及湍流模型问题。当考虑不可压和粘性时，须另外讨论。

Euler 方程在数学上属于双曲系统，双曲系统的数学理论已比较成熟，因此本章讨论不完全局限于 Euler 方程，而是针对一般的双曲系统，但只考虑光滑解加有限个第一类间断解(激波，滑移面)的简单情况。

第一节　非线性守恒系统基本概念，Euler 方程

对于一维问题，非线性守恒方程系统的一般形式可以写成：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}=0, x\in \mathbf{R}, t>0 (\text{微分方程}) \tag{2-1}$$

$$\boldsymbol{w}(x,0)=\boldsymbol{w}_0(x), x\in \mathbf{R} (\text{初始条件}) \tag{2-2}$$

其中，未知函数(守恒变量，也称因变量)$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(x,t)$有 m 个分量，$\boldsymbol{w}=(w^{(1)},w^{(2)},\cdots,w^{(m)})^T$。函数 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})$称为通量函数，一般要求 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{w}$ 的足够光滑的函数，并且满足关系式 $\lim_{|\boldsymbol{w}|\to 0}|\boldsymbol{f}|=0$。

守恒概念是这样来的：

令 $\boldsymbol{w}_0$ 具有紧支集(即在 $\mathbf{R}$ 中除一有界区域外恒为零)，将式(2-1)对 $x\in\mathbf{R}$ 积分得：

$$\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{w}(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{w}_0(x)\mathrm{d}x$$

于是，$\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{w}(x,t)\mathrm{d}x$ 是守恒量(不随时间变化)。

系统(2-1)加初始条件(2-2)称为初始值问题，也称柯西问题。实际问题往往定义在有限区域上，此时还存在边界条件。但现在引入边界条件还缺乏一些预备知识，所以将在本章稍远的地方单独讨论。

一阶非线性守恒方程最典型的例子是无粘 Bürgers 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=0 \tag{2-3}$$

如果初始条件 $u(x,0)=u_0(x)$光滑，则在足够小的时间内，式(2-3)的解为：$u(x,t)=u_0(x-ut)$。对守恒系统(2-1)，可以定义如下的展开系统：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}=0, x\in\mathbf{R},\qquad t>0 \tag{2-4}$$

其中 $\mathbf{A}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}$ 称为通量函数的雅可比矩阵。稍后引入的双曲性正是由雅可比矩阵来定义的。展开系统只在解光滑的区域才与守恒系统等价，展开系统不适合研究不连续解(激波与滑移线)。

令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(x,t)$ 为方程(2-4)的解并设 $\boldsymbol{w}'$ 为一小扰动，将 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{w}'$ 代入式(2-1)中，便得线性化系统：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}'}{\partial t}+\boldsymbol{A}(\mathbf{W})\frac{\partial \boldsymbol{w}'}{\partial x}=\boldsymbol{F}, \qquad x\in\mathbf{R},t>0 \tag{2-5}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}' \tag{2-6}$$

为源项。因此，当非线性系统线性化后，便产生了形如式(2-6)的源项，正因如此，在解的光滑区内用线性理论进行研究时，必须在线性化方程中添加源项(2-6)。

在线性化方程(2-5)中，如果将 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 的值冻结在任意的但固定的点 (x_0,t_0) 上，则得相应的常系数系统：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}'}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{w}'}{\partial x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}',x\in\mathbf{R},t>0 \tag{2-7}$$

以后的部分理论是针对常系数系统建立的。最简单的常系数系统是运输方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-8}$$

流体力学中描述可压缩无粘流动的 Euler 方程是最典型的非线性守恒系统，它的一维形式包含如下三个方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0 \qquad (质量守恒) \tag{2-9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)=0 \qquad (动量守恒) \tag{2-10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u H)=0 \qquad (能量守恒) \tag{2-11}$$

式中，ρ 为密度，p 为静压，u 为速度，E 为总能，H 为总焓。

总能 E 与内能 e 以及总焓 H 与焓 h 的关系式分别为：$E=e+\frac{1}{2}u^2$，$H=h+\frac{1}{2}u^2$。另外有 $h=e+\frac{p}{\rho}$。

压力与能量通过状态方程联系，在完全气体假设的前提下，状态方程为：

$$p=(\gamma-1)\rho(E-\frac{1}{2}u^2) \tag{2-12}$$

其中 γ 为比热比。对于空气，一般取 $\gamma=1.4$。

另外还有两个常用物理量：声速 $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$ 和熵 $S=c_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma}$($c_v$ 为定容比热)。

Euler 方程虽然是非线性方程，通量函数却是齐次函数，即 $\boldsymbol{f}(\theta\boldsymbol{w})=\theta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})$，从而有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}$。

有几种特殊流动，Euler 方程的前面两个方程与第三个方程可以独立求解。它们是：等温流动 $(e=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\mathrm{Const})$，等熵流动 $(S=c_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma}=\mathrm{Const})$，等(总)焓流动 $(H=h+\frac{1}{2}u^2=\mathrm{Const})$。

尽管 Euler 方程在求解时用的主要是其守恒形式，但在分析时用展开形式可能更有效。展开形式主要有如下两种：

1. 守恒变量形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}=\boldsymbol{F} \tag{2-13}$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w^{(1)},w^{(2)},w^{(3)})^{\mathrm{T}}=(\rho,\rho u,\rho E)^{T}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)\dfrac{u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3-\gamma uE & \gamma E-3\dfrac{\gamma-1}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

2. 基本变量形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}_p}{\partial t}+\boldsymbol{A}_p\frac{\partial \boldsymbol{w}_p}{\partial x}=\boldsymbol{F}_p \tag{2-14}$$

其中 $\boldsymbol{w}_p=(\rho,u,p)^{\mathrm{T}}$ 为基本变量或原始变量，由实验可以测量到。基本变量形式的优点是，雅可比矩阵

$$\boldsymbol{A}_p=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix}$$

十分简单，便于求特征值。

通过量纲分析，可以推导出 Euler 方程的一些极限情况。令压力为密度的单值函数 $p=r(\rho)$（正压流体假设），此时可以去掉能量方程而将 Euler 方程写为：

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+u'\frac{\partial\rho'}{\partial x}+\rho'\frac{\partial u'}{\partial x}=0 \tag{2-15}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+\frac{\partial p'}{\partial x}=0 \tag{2-16}$$

这里为了方便引入了上标“′”。

令 $u'=Uu,\rho'=Q\rho,p'=Pp,x'=Lx,t'=Tt$。这里 u,ρ 和 p 以及它们的微分均具有量级 $O(1)$，U,Q,P,L 和 T 为尺度参数。其中 Q 和 P 满足关系式 $P=r(Q)$。定义 $F=\dfrac{UT}{L},Ma=\sqrt{\dfrac{U^2Q}{P}}(Ma)$，于是方程(2-15)和(2-16)可以写成：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+Fu\frac{\partial\rho}{\partial x}+F\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-17}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+Fu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{F}{Ma^2}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2-18}$$

高超声速极限　令 $Ma\to\infty,F\to1$，此时方程(2-15)和(2-16)简化为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-20}$$

方程(2-20)即为无粘 Bürgers 方程。Bürgers 方程往往被认为只具有理论意义而不具备任何物理意义。但实际上它描述了高超声速极限情况下速度的变化规律，具有明显的物理意义。

不可压极限　令 $\rho'=\rho_0+Q\rho,|Q|\ll1$。从状态方程有：$p'=r(\rho')=r(\rho_0+Q/\rho)\approx r(\rho_0)+Q\dfrac{\mathrm{d}r(\rho_0)}{\mathrm{d}\rho_0}\rho$。令 $p'=p_0+Pp,p_0=r(\rho_0),P\sim Q\dfrac{\mathrm{d}r(\rho_0)}{\mathrm{d}\rho_0},\rho=p$，将 $\rho'=\rho_0+Q\rho,p'=p_0+Pp$ 代入方程(2-

15)和方程(2-16)，得：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+Fu\frac{\partial\rho}{\partial x}+F\frac{\rho_0+Q\rho}{Q}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-21}$$

$$(\rho_0+Q\rho)\left[\frac{\partial u}{\partial t}+F\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+F\frac{Q}{Ma^2}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2-22}$$

取 $Ma\to0,Q\to0,F\to1,\frac{Q}{Ma^2}=1$。此时方程(2-21)和(2-22)转变为：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2-24}$$

这就是不可压 Euler 方程。因此，不可压流动确实可以看成是某种可压流动的极限。

波动方程　在方程(2-21)和方程(2-22)中令 $Q\to0,F\to0,FQ/Ma^2\to\alpha\neq0,F/Q\to\beta\neq0$。于是有：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\beta\frac{\partial u}{\partial x}=0,\rho=p$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

在上面方程组中消去 u，便得如下的波动方程：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} \tag{2-25}$$

其中 $a=\frac{T}{L}c$，c 为声速。因此波动方程是 Euler 方程在小 Ma 和小时间尺度下的极限。

第二节　双曲性与适定性

对于一阶微分系统，双曲性与适定性是两个相互关联的概念。考虑如下常系数展开系统：

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}+\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}=\mathbf{F},\quad x\in\mathbf{R},0\le t\le T \tag{2-26}$$

$$\mathbf{w}(x,0)=\mathbf{w}_0,\quad x\in\mathbf{R} \tag{2-27}$$

其中 $\mathbf{w}=\mathbf{w}(x,t)\in\mathbf{R}^m$，$\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m,m}$。

一、双曲性

令矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda^{(k)}$，$k=1,2,\cdots,m$。由 $\lambda^{(k)}$ 构成的对角矩阵记为 Λ。

假定 $\mathbf{A}$ 为常系数矩阵：

(a) 如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征值均为实数，则方程(2-26)称为弱双曲系统；

(b) 如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征值均为实数，并且 $\mathbf{A}$ 可以对角化(即有 m 个线性无关的特征向量)，则方程(2-26)称为(强)双曲系统；

(c) 如果 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$(从而存在单位矩阵将 $\mathbf{A}$ 对角化)，则方程(2-26)称为对称双曲系统；

(d) 如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征值均为实数并且互异，则方程(2-26)称为狭义双曲系统。

对于非线性系统(2-1)，$\mathbf{A}$ 随时间与空间变化，从而系统的特性可能与空间和时间有关。但往往要求双曲性条件处处满足。

例 1 考虑系统：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -c^2 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}=0$$

可以证明，矩阵 **A** 有两个实特征值 $-1\pm c$。当 $c\neq 0$ 时，相应的特征向量 $(\frac{1}{c},1)^{\mathrm{T}}$，$(-\frac{1}{c},1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，因而系统为双曲的。当 $c=0$ 时，只有一个线性无关的特征向量 $(1,0)^{\mathrm{T}}$，因而 **A** 不能对角化，故系统为弱双曲型的。

例 2 考虑 Euler 方程(2-13)，不难验证，$\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为：$\lambda^{(1)}=u$，$\lambda^{(2)}=u+c$，$\lambda^{(3)}=u-c$。很明显，$\lambda^{(3)}<\lambda^{(1)}<\lambda^{(2)}$，所以一维 Euler 方程为狭义双曲系统。

双曲性概念的引入有其明确的意义：

(a) 当解连续且处处满足偏微分方程时，双曲性是与下面介绍的适定性相关联的，至少在常系数时，双曲性是与适定性等价的。

(b) 这里讨论的是一阶偏微分方程。在数学物理方程中，把二阶偏微分方程分成双曲型，抛物型与椭圆型三类。一阶双曲型方程与二阶双曲型方程不能说没有联系。在某种简化前题下，一阶双曲型方程组可以转化为一个二阶标量双曲方程，最典型的例子是前面提到的波动方程(2-25)。

(c) 双曲性定义是相对时间的。对于定态问题，时间项消失，此时原双曲性定义不再有任何意义。例如，在二维情况下，Euler 方程是双曲型的，但在定态时，原双曲性定义便失去了意义。特别是在小扰动假设下，定态 Euler 方程可转化为二阶标量方程(位势方程)，在超声速区为双曲型，在亚声速区为椭圆型。

二、适定性

现在来讨论柯西问题(2-26)和(2-27)的适定性问题。这里讨论的适定性是针对古典解的。如果双曲系统(2-1)的解 $\boldsymbol{w}$ 连续而且 $\boldsymbol{w}$ 的一阶偏导数分段连续，则 $\boldsymbol{w}$ 称为古典解。

从数学上讲，适定性包含三个基本问题：1) 对 $0<t<T$，柯西问题(2-26)和(2-27)是否有解？2)如果问题有解，它的解是否唯一？3) 假定对固定的源项 $\mathbf{F}$ 和初始值 $\mathbf{w}_0$，柯西问题(2-26)和(2-27)有唯一解 $\boldsymbol{w}$，当在 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{w}_0$ 加入小扰动时，这些小扰动对解 $\mathbf{w}$ 产生什么样的影响？这里只就古典解研究适定性。对于古典解，非线性问题的适定性与线性化问题的适定性密切相关。

线性化准则：如果在 $\mathbf{w}$ 附近对非线性方程线性化所得的所有线性方程都是适定的，则该非线性方程对 $\mathbf{w}$ 是适定的。

如果方程具有常系数，则用傅里叶分析可以方便地研究适定性。对于双曲系统，下面的局部化原则成立：如果对变系数线性问题冻结系数所得的所有常系数问题均适定，则该变系数线性问题是适定的。

由于上述原则，可以只讨论常系数线性系统(2-26)和(2-27)的适定性。

假定对固定的 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{w}_0$，柯西问题(2-26)和(2-27)有唯一解 $\boldsymbol{w}$。如果存在 $\epsilon>0$，使得对所有的满足 $\|\delta\boldsymbol{F}\|_{(2)}+\|\delta\boldsymbol{w}_0\|_{(3)}\leqslant\epsilon$ 的光滑小扰动 $\delta\boldsymbol{F}$，$\delta\boldsymbol{w}_0$，扰动问题 $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}=\boldsymbol{F}+\delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}=w_0+\delta\boldsymbol{w}_0)$ 有唯一解，而且 $\delta\boldsymbol{w}:=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 满足估计式 $\|\delta\boldsymbol{w}\|_{(1)}\leqslant K(\|\delta\boldsymbol{F}\|_{(2)}+\|\delta\mathbf{w}_0\|_{(3)})$，则称柯西问题是适定的。这里 K 与扰动大小无关，$\|\delta\boldsymbol{w}\|_{(1)}$，$\|\delta\boldsymbol{F}\|_{(2)}$，$\|\delta\boldsymbol{w}_0\|_{(3)}$ 为某种范数。不同范数会导致不同的

适定性定义，最常用的是 L_2 范数①。用 L_2 范数，可将适定性定义如下：

定义 2.1 如果存在常数 K,α，使得解满足 $\|\mathbf{w}(\cdot,t)\|\leqslant Ke^{\alpha t}\|\mathbf{w}(x,0)\|$，则称柯西问题(2-26)和(2-27)是适定的；如果存在常数 K,α 和整数 $q\geqslant 1$，使得满足 $\|\mathbf{w}(\cdot,t)\|\leqslant Ke^{\alpha t}\|\mathbf{w}(x,0)\|_{H^q}$，则称柯西问题(2-26)和(2-27)的弱适定的②。

数学上已经证明：

1. **适定性定理** 柯西问题(2-26)和(2-27)适定的充要条件是方程(2-26)为双曲系统。
2. **弱适定性定理** 柯西问题(2-26)和(2-27)弱适定的充要条件是方程(2-26)为弱双曲系统。
3. **适定性不变定理** 如果(2-26)为双曲系统，则在其右端添加扰动项 $\boldsymbol{Bw}$ 后，柯西问题(2-26)和(2-27)仍保持适定。

适定性不变定理对弱双曲系统是不成立的。前面提到，非线性方程线性化时，会产生形如 $\boldsymbol{Bw}$ 的源项。因此，弱双曲性定义不适合非线性方程。

第三节　特征线与黎曼不变量

一、特征向量与矩阵的对角化

令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda^{(k)},k=1,2,\cdots,m$。对每个特征值 $\lambda^{(k)}$，定义左特征向量 $\boldsymbol{l}^{(k)}$(行向量)和右特征向量 $\boldsymbol{r}^{(k)}$(列向量)：$\boldsymbol{l}^{(k)}\boldsymbol{A}=\lambda^{(k)}\boldsymbol{l}^{(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}^{(k)}=\lambda^{(k)}\boldsymbol{r}^{(k)}$。由矩阵论知，左特征向量与右特征向量相互正交，即 $\boldsymbol{l}^{(i)}\boldsymbol{r}^{j}=\delta_{ij}$。令 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别为左特征向量和右特征向量构成的矩阵：

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{l}^{(1)}\\ \boldsymbol{l}^{(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{l}^{(m)}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{r}^{(m)})$$

则有 $\boldsymbol{LA}=\boldsymbol{\Lambda L},\boldsymbol{AR}=\boldsymbol{R\Lambda}$。如果有 m 个线性无关的特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 均可逆，从而有：$\boldsymbol{LAL}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{AR}=\boldsymbol{\Lambda}$。

对于 Euler 方程，三个特征值分别为：$\lambda^{(1)}=u-c,\lambda^{(2)}=u,\lambda^{(3)}=u+c$，相应的特征向量为：

$$\boldsymbol{l}^{(1)}=\frac{\gamma-1}{p}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{cu}{\gamma-1},-u-\frac{c}{\gamma-1},1\right),\boldsymbol{r}^{(1)}=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix}1\\ u-c\\ \frac{u^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}-cu\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{l}^{(2)}=-\frac{1}{p}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{c^2}{\gamma-1},-u,1\right),\boldsymbol{r}^{(2)}=\frac{\rho(\gamma-1)}{\gamma}\begin{bmatrix}1\\ u\\ \frac{u^2}{2}\end{bmatrix}$$

---

① 对某函数 $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$，如果 $x\to|\phi|^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上(Lebesque-)可积，则记为 $\phi\in L_2$。在空间 L_2 上定义的内积和范数：$(\phi,\psi)=\int_{\mathbf{R}}<\phi,\psi>\mathrm{d}x$，$\|\phi\|=(\phi,\psi)^{\frac{1}{2}}$。相应的 Parseval 关系式为：$(\phi,\psi)=(\hat{\phi},\hat{\psi})$，$\|\phi\|=\|\hat{\phi}\|$，其中 $\hat{\phi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{i\omega x}\phi(x)\mathrm{d}x$ 为 ϕ 的傅里叶变换。

② $\|\mathbf{w}_0\|_{H^q}=\sum_{\nu\leqslant q}\|\frac{\partial^\nu \mathbf{w}_0}{\partial x^\nu}\|$。由 *Parseval* 关系式，$\|\mathbf{w}_0\|_{H^q}=\|\omega^\nu\hat{\mathbf{w}}_0\|$，从而有：

$$\|\mathbf{w}_0\|_{H^q}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\sum_{\nu\leqslant q}\omega^\nu|\hat{\mathbf{w}}_0(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

$$l^{(3)} = \frac{\gamma-1}{p}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{cu}{\gamma-1}, -u + \frac{c}{\gamma-1}, 1\right), r^{(3)} = \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix}1 \\ u+c \\ \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma+1} - ac\end{bmatrix}$$

令 $A=A_0$ 为常数，对于 Euler 方程，定义特征变量 $w_c=Lw$，易验证，$w_c=\begin{pmatrix}\frac{\rho-1}{c_o^2}p \\ u+\frac{1}{\rho_0 c_0} \\ u-\frac{1}{\rho_0 c_0}\end{pmatrix}$。由 $w=L^{-1}w_c=Rw_c$，得：$w = \sum_{k=1}^{m} w_c^{(k)} r^{(k)}$

二、特征线与古典黎曼不变量

将展开系统(2-4)乘以左特征向量 $l^{(k)}$ 并利用关系式 $l^{(k)}A=\lambda^{(k)}l^{(k)}$，得如下标量方程：

$$l^{(k)}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda^{(k)}\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{2-28}$$

对每个 k，由

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(k)} \tag{2-29}$$

定义的线族 Γ^k 称为系统(2-4)的特征线。

如果定义 $\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{\Gamma^k} \underline{\underline{def}} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{\Gamma^k}$，则对每个 k，有：

$$l^{(k)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\Big|_{\Gamma^k} = 0 \tag{2-30}$$

称(2-30)为特征线形式的方程。

对于 Euler 方程，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}(\rho)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}(\rho E)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}\right)$，$l^{(1)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \rho c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$，$l^{(3)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \rho c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$，$l^{(2)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{p}{\rho^\gamma}$。因此，特征线形式的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \pm \rho c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm c \tag{2-31}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \tag{2-32}$$

这里 $S=c_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma}$。

假定初始条件为常数，据式(2-32)，有：$S(x,t)=\text{Const.}$。于是，方程(2-31)成为：

$$R^{\pm} = \text{const.}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm c \tag{2-33}$$

这里 $R^+=u+\frac{2}{\gamma-1}c$，$R^-=u-\frac{2}{\gamma-1}c$ 称为古典黎曼不变量，值得注意的是，古典黎曼不变量。$R^\pm$ 是在条件 $S=\text{Const}$ 下得出的。

三、Lax-黎曼不变量，简单波(单波)

原偏微分方程乘以左特征值导致了古典黎曼不变量的定义。用右特征值可以导出更一般的结

论，相应的黎曼不变量称为 Lax-黎曼不变量。

如果标量函数 $R^{(k)}=R^{(k)}(w)$ 满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}R^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}=0 \quad \forall\, w\in\Omega \tag{2-34}$$

其中$\frac{\mathrm{d}R^{(k)}}{\mathrm{d}w}$为行向量，则 $R^{(k)}$ 称为双曲系统(2-1)的 k 位黎曼不变量(Lax-黎曼不变量)。

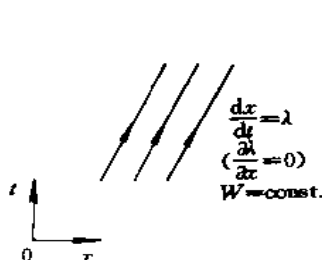


图 2-1　线性蜕化波

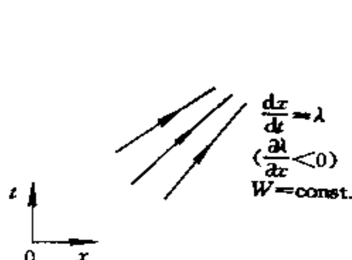


图 2-2　压缩波

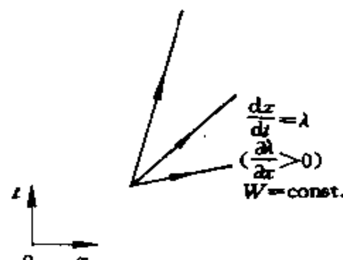


图 2-3　稀疏波

很显然，由式(2-34)可以求出 $m-1$ 个 k 位黎曼不变量：$R_p^{(k)}$，$p=1,2,3,\cdots,m-1$。例如，Euler 方程的 Lax-黎曼不变量为 6 个：

$$R_1^{(1)}=u+\frac{2}{\gamma-1}c,\quad R_2^{(1)}=S\quad \lambda^{(1)}=u-c$$

$$R_1^{(2)}=u,\qquad R_2^{(2)}=p\quad \lambda^{(2)}=u$$

$$R_1^{(3)}=u-\frac{2}{\gamma-1}c,\quad R_2^{(3)}=S\quad \lambda^{(3)}=u+c$$

对于等熵流动 Euler 方程有 $m=2$，相应的 Lax-黎曼不变量为：

$$R_1^{(1)}=u+\frac{2}{\gamma-1}c\qquad \lambda^{(1)}=u-c$$

$$R_1^{(2)}=u-\frac{2}{\gamma-1}c,\qquad \lambda^{(2)}=u+c$$

如果所有的 k 位黎曼不变量均为常数，则(2-1)的解称为 k—简单波。

对具有 m 个分量的解 $\mathbf{w}$，有 $m-1$ 个 k 位黎曼不变量，所以一个 k—简单波只含有一个自由参数。

如果条件$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}\neq 0$ $\forall\, w\in\Omega$ 满足，则第 k 个特征波场称为纯非线性；如果条件$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}=0$ $\forall\, w\in\Omega$ 满足，则第 k 个特征波场称为线性蜕化(图 2-1)。

令第 k 个特征波场为纯非线性，如果$\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x}<0$，则该 k-简单波称为压缩波(图 2-2)；如果$\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x}>0$，则该 k-简单波称为稀疏波(图 2-3)。

对于 Euler 方程，有：$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(1)}}{\mathrm{d}w}r^{(1)}=-\frac{\gamma+1}{4\gamma}c$，$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(2)}}{\mathrm{d}w}r^{(2)}=0$，$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(3)}}{\mathrm{d}w}r^{(3)}=\frac{\gamma+1}{4\gamma}$。所以第一个和第三个特征波场为纯非线性，而第二个为线性蜕化。对于 3-简单波，$u-\frac{2}{\gamma-1}c=\mathrm{Const}$，$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\mathrm{Const}$，$\frac{\partial\lambda^{(3)}}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\gamma+1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$，所以当$\frac{\partial u}{\partial x}<0$ 时为压缩波，当$\frac{\partial u}{\partial x}>0$ 时为稀疏波。

第四节　弱解，黎曼问题

对于非线性双曲方程，即使初始条件连续，也可能在有限时间内出现解的间断。气体动力学中激波与滑移面的出现便是人们熟悉的例子。当解出现间断时，在间断点原偏微分方程形式不再成立，前面针对古典解的理论也不再适应。为了研究间断解，要用这里介绍的弱解理论。

一、Bürgers 方程的弱解

这里用下面的具有连续初始条件的 Bürgers 方程来简要说明弱解的存在、产生、定义和特性：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad x\in \mathbf{R},t>0 \tag{2-35}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in \mathbf{R} \tag{2-36}$$

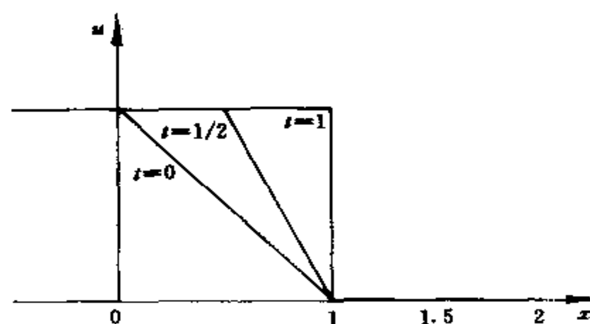


图 2-4　Bürgers 方程压缩波的发展：$t\leqslant 1$

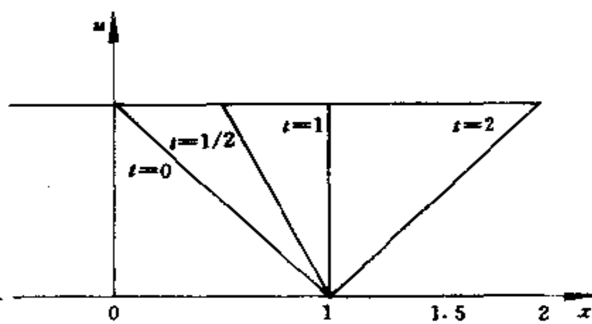


图 2-5　Bürgers 方程压缩波的发展：$0\leqslant t\leqslant 2$ 多值解

考虑如下的初始条件(压缩波)：

$$u_0(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 0\\ 1-x & 0<x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases} \tag{2-37}$$

当解连续时，$u(x,t)=u(x-ut,0)$。对应上述初始条件的解为：

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x\leqslant t\\ \dfrac{1-x}{1-t} & t<x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases} \tag{2-38}$$

很明显，当 $0<t<1$ 时，解(2-38)连续(图 2-4)

当 $t\to 1$ 时，解(2-38)不再连续而变成：

$$u(x)=\begin{cases}1 & x<1\\ 0 & x>1\end{cases} \tag{2-39}$$

现在考虑这样一个问题：当 $t>1$ 时，解如何发展？如果仅是连续解(2-38)的连续推广，则有：

$$u(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant t\\ \dfrac{1-x}{1-t} & 1<x\leqslant t\\ 0 & x>1\end{cases} \tag{2-40}$$

从而 u 在区间 $1\leqslant x\leqslant t$ 是一多值函数(图 2-5)，这在物理上是没有意义的。

我们研究的双曲系统应该具有其物理背景，而任何物理问题都或多或少含有一些耗散。双曲系统应该看成是耗散趋于零的极限。例如，无粘 Euler 方程是 N-S 方程在粘性趋于零的极限。为了求得任意时刻具有物理意义的解，考虑下面的粘性 Bürgers 方程在耗散系数 $\varepsilon\to 0$ 时的极限解：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in\mathbf{R},t>0 \tag{2-41}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_0(x)\in C_0^0 \tag{2-42}$$

数学上可以证明，由式(2-41)和式(2-42)定义的柯西问题在任何时刻解唯一而且光滑，因而方程(2-41)在任何时刻都有意义。设 $\phi=\phi(x,t)$ 为足够光滑且具有紧支集的试验函数。将方程(2-41)乘以 ϕ 后对时间与空间求积得：

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0 \tag{2-43}$$

因 φ 是任意的，所以方程(2-43)和式(2-41)是等价的。用分部积分，方程(2-43)可以写成：

$$\varepsilon\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(u\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^\infty u(x,0)\phi(x,0)\mathrm{d}x$$

将初始条件代入上式并令 $\varepsilon\to 0$，得：

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(u\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x \tag{2-44}$$

因此 $u|_{\varepsilon\to 0}$ 满足方程(2-44)。

注意这样两个事实：(1)方程(2-44)的解确实是方程(2-41)在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限解，因而具有物理背景；(2) 在方程(2-44)中，偏导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 不存在，所以方程(2-44)对分段连续解仍有意义。因此，我们定义：如果 $u(x,t)$ 使得方程(2-44)对所有试验函数 $\phi\in C_0^1$ 都成立，则 $u(x,t)$ 称为柯西问题(2-35)和(2-36)的弱解。

考虑分段连续的弱解，假定弱解在曲线 $\Gamma:(x=s(t),t),t_0<t<t_1$ 上有间断并且令：

$$u_l(s(t),t)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{x\to s(t)^-}u(x,t),\quad u_r(s(t),t)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{x\to s(t)^+}u(x,t)$$

设试验函数 ϕ 的支集是包含间断线 Γ 的足够小的邻域 U。邻域 U 被 Γ 分成左右两部分 U_l,U_r。由弱解定义式(2-44)得：

$$\begin{aligned}
0&=\int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x+\iint_U\left(u\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-\iint_{U_l}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Gamma\left(u_l\phi\mathrm{d}x-\frac{1}{2}u_l^2\phi\mathrm{d}t\right)-\\
&\qquad\iint_{U_r}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\phi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Gamma\left(u_r\phi\mathrm{d}x-\frac{1}{2}u_r^2\phi\mathrm{d}t\right)\\
&=-\int_\Gamma\phi\left[(u_l-u_r)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(u_l^2-u_r^2)\mathrm{d}t\right]=-\int_0^\infty\phi\left[(u_l-u_r)s'(t)-\frac{1}{2}(u_l^2-u_r^2)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

因 ϕ 任意，所以有：

$$(u_l-u_r)s'(t)=\frac{1}{2}(u_l^2-u_r^2),\qquad s'(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{2-45}$$

这就是所谓的 Rankine-Hugoniot(激波)跳跃关系式，简称 R-H 关系式。

从上面的分析知，分段光滑函数 u 是柯西问题(2-35)—(2-36)弱解的充要条件是：(a)解 u 在所有连续点满足初始条件 $u(x,0)=u_0(x)$，(b)在解 u 光滑处，偏微分方程(2-35)局部成立，(c)在解

u 间断处满足跳跃关系式(2-45)。

易验证,对于初始条件(2-37),Bürgers 方程在 $t>1$ 时的弱解为(图 2-6):

$$u(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 1+\dfrac{t-1}{2},t>1\\ 0 & x\geqslant 1+\dfrac{t-1}{2}t>1\end{cases} \tag{2-46}$$

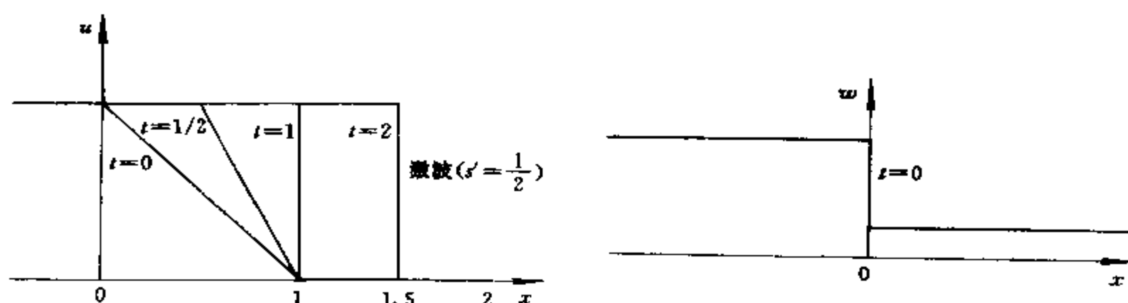


图 2-6 Bürgers 方程压缩波的发展:$0\leqslant t\leqslant 2$ 弱解　图 2-7 黎曼问题:$w(x,0)|_{x<0}=w_l, w(x,0)|_{x>0}=w_r$

二、一般系统弱解的定义

现在将上面弱解的定义推广到一般守恒系统(2-1)和(2-2)。如果函数 $w(x,t)$ 除有限个点外均为古典解,并且对任意试验函数 $\phi\in C_0^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)^m$ 有:

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(w\frac{\partial\phi}{\partial t}+f(w)\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^\infty w_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x \tag{2-47}$$

则称 $w(x,t)$ 为柯西问题(2-1)和(2-2)的弱解。

可以证明,分段光滑函数 w 是柯西问题(2-1)和(2-2)弱解的充要条件是:(a)解 w 在所有连续点满足初始条件 $w(x,0)=w_0(x)$;(b)在解 w 光滑处,偏微分方程(2-1)局部成立,(c)在解 w 间断处满足跳跃关系式:

$$<f(w)>=s'\langle w\rangle \tag{2-48}$$

其中,s' 为间断点的移动速度,$\langle\psi\rangle$ 为函数 ψ 在间断左右的跳跃,即 $\langle\psi\rangle=\psi_r-\psi_l$。

对于 Euler 方程,有 $f(w)-s'w=\begin{bmatrix}\rho u_s\\ \rho uu_s+p\\ \rho Eu_s+pu\end{bmatrix}$,$u_s=u-s'$,由(2-48)得如下经典激波跳跃关系式:

$$\langle\rho u_s\rangle=0,\langle\rho uu_s+p\rangle=0,\langle\rho Eu_s+pu\rangle=0$$

三、黎曼问题

对于 Euler 方程,考虑间断初始条件(图 2-7):

$$w_0(x)=w_l,\quad x<0,\qquad w_0(x)=w_r,x>0$$

先定义三种波:滑移面、激波与稀疏波。

滑移面　这是一个 2-简单波,没有流体穿过滑移面,由 R-H 条件得:$\langle p\rangle=0$,$\langle u\rangle=0$。

激波　对于纯非线性特征波,满足 R-H 条件的一般间断称为激波。因滑移面为线性蜕化波,所

以不属于激波，由 R-H 的 3 条件，连接定义间断的 7 个未知数：$\boldsymbol{w}_l, s', \boldsymbol{w}_r$，如果定义 $r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_l - u_r}{c_r}$ 和 $M_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s' - u_r}{c_r}$（激波 Ma 数），则由 R-H 条件得下面关系式：

$$M_r = \frac{\gamma + 1}{4} r + \sqrt{(\frac{\gamma + 1}{4})^2 r^2 + 1}, \frac{p_l}{p_r} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_r^2 - 1)$$

稀疏波　稀疏波是定义在有限区间上的自相似连续解，即 $\boldsymbol{w}(x,t) = \boldsymbol{v}(\xi)$，　$(\xi = \frac{x}{t})$，这里 $\boldsymbol{v}(\xi)$ 满足

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}) - \xi \boldsymbol{I}) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\xi} = 0$$

于是 $\boldsymbol{v}'$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})$ 的右特征值。对于左移稀疏波，波前和波后的移动速度分别为 $u_1 - c_l$ 和 $u_r - c_r$，熵 S 和黎曼不变量 R 在波中为常数。对于右移稀疏波，波前和波后的移动速度分别为 $u_r + c_r$ 和 $u_l + c_l$，熵 S 和黎曼不变量 R^- 在波中为常数。

可以证明，对于间断初始条件，$t > 0$ 时的一般解是由一个向左移动的波、一个处于中间的 2-简单波（滑移面）和一个向右移动的波构成的，向左和向右移动的波或为激波，或为稀疏波，三个波之间由常态构成（图 2-8）。有 5 种状态（图 2-9）：(1)左移稀疏波＋滑移面＋右移激波；(2) 左移激波＋滑移面＋右移稀疏波；(3) 左移稀疏波＋滑移面＋右移稀疏波；(4) 左移激波＋滑移面＋右移激波；(5) 左移稀疏波＋滑移面＋真空＋滑移面＋右移激波。

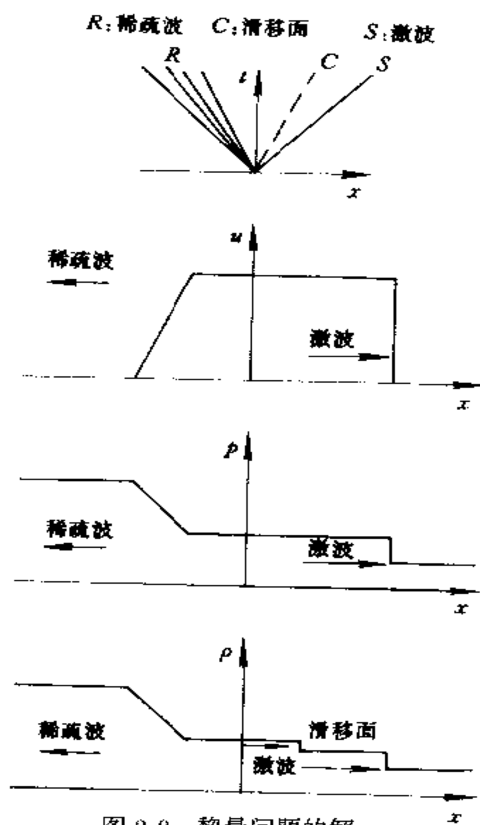


图 2-8　黎曼问题的解

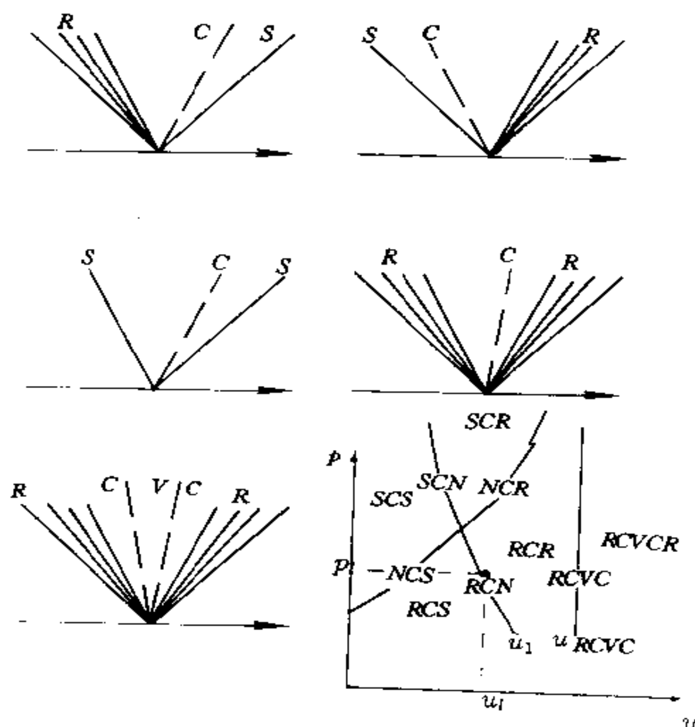


图 2-9　黎曼问题五种可能的波态和它们在 u-p 平面所对应的区域

由初始间断的左右状态，确定 $t>0$ 时波态、波的强度和波与波之间的流动特性的问题称为黎曼问题，相应的算法称为黎曼算子。

在 u-p 平面上，可以给出确定波态的区域，用 S 表示激波，C 表示滑移面，R 表示稀疏波，N 表示不存在(上述三种波的任何一种)确定各区域的边界由下面式子定义(图 2-9)：

$$SCN: \qquad u_r = u_l - \frac{\frac{c_l}{\gamma_l}\left(\frac{p_r}{p_l} - 1\right)}{\sqrt{\frac{\gamma_l + 1}{2\gamma_l}\frac{p_r}{p_l} + \frac{\gamma_l - 1}{2\gamma_l}}}$$

$$NCS: \qquad u_r = u_l - \frac{\frac{c_r}{\gamma_r}\left(\frac{p_l}{p_r} - 1\right)}{\sqrt{\frac{\gamma_r + 1}{2\gamma_r}\frac{p_l}{p_r} + \frac{\gamma_r - 1}{2\gamma_r}}}$$

$$NCR: \qquad u_r = u_l + \frac{2c_r}{\gamma_r - 1}\left[1 - \left(\frac{p_l}{p_r}\right)^{\frac{\gamma_r - 1}{2\gamma_r}}\right]$$

$$RCN: \qquad u_r = u_l + \frac{2c_l}{\gamma_l - 1}\left[1 - \left(\frac{p_r}{p_l}\right)^{\frac{\gamma_l - 1}{2\gamma_l}}\right]$$

$$RCVR: \qquad u_r = u_l + \frac{2c_l}{\gamma_l - 1} + \frac{2c_r}{\gamma_r - 1}$$

在每条边界上，边界左右区域中存在的一个波消失或蜕化为一马赫波。例如，SCN 表示一个左移激波加一个滑移面，而右边或者没有波、或者有一右移马赫波。

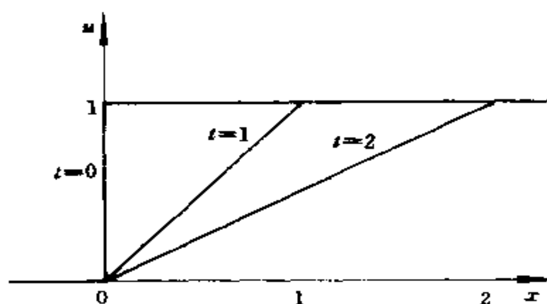


图 2-10 稀疏波

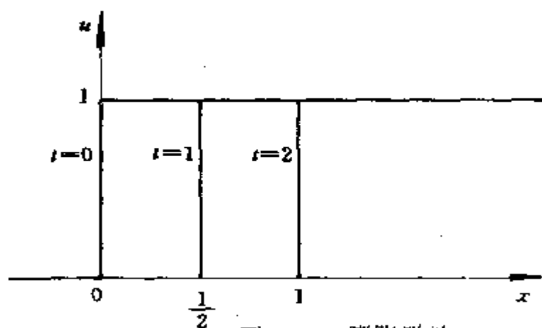


图 2-11 膨胀激波

第五节 熵条件

尽管粘性 Bürgers 方程在 $\varepsilon \to 0$ 时的解是无粘 Bürgers 方程的一弱解，但无粘 Bürgers 方程的弱解未必是粘性 Bürgers 方程在 $\varepsilon \to 0$ 时的解，也就是说，弱解(2-44)可能不唯一。考虑下面的初始条件：

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{2-49}$$

用此初始条件，Bürgers 方程有一连续解(图 2-10)：

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \qquad (\text{稀疏波}) \\ 1 & t \leqslant x \end{cases}$$

和一膨胀激波(图 2-11)

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2}t\\ 1 & x>\frac{1}{2}t\end{cases} \qquad \text{(膨胀激波)}$$

易证,上面的间断解满足跳跃关系式(2-45)。因此,用同一初始条件,得出了两个弱解:稀疏波和没有物理意义的但满足 R-H 关系式的膨胀激波。

在气体动力学中,热力学第二定理要求耗散系统熵($S=c_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma}$)是增加的。当流体质点穿过激波时,因粘性作用熵应该增加、压力变大。因此,间断解的左右之间的状态必需满足熵增条件才具有物理意义。另外,也可从稳定性分析来判断间断解是否具有物理意义。给间断解添加某种小扰动,如果间断解保持稳定,则属于物理解。例如,给前面的膨胀激波加一小扰动,使其变为刚开始发展的稀疏波,则往后解以稀疏波发展,即膨胀激波不稳定。熵的概念也可直接从数学上引入,下面介绍的熵的概念是从粘性方程定义的。如果弱解是粘性方程当粘性系数趋于零时的极限解,则称此弱解为熵解,或具有物理意义的解。另外还可定义数学上的熵。如果满足某种条件使得解为熵解,则称该条件为熵条件。

由前面的黎曼分析知,Euler 方程的古典解对应的熵 $S=c_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma}$满足$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS)}{\partial x}=0$。令 $E=\rho S, F=\rho uS$,则上面的方程可以写成:$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$,从而有:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}=0$$

用方程(2-1),便得协调关系式$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\boldsymbol{A}$。对于一般双曲线系统,我们用如下方式来定义熵。

设标量函数 $E=E(\boldsymbol{w})\in C^2$ 为严格凸函数①,如果存在函数 $F=F(\boldsymbol{w})\in C^2$ 满足协调关系式$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\boldsymbol{A}$,则称 E 为双曲系统(2-1)的熵。相应地,$F(\boldsymbol{w})$称为与 $E(\boldsymbol{w})$相关联的熵通量,(E,F)称为熵对。

对于 Bürgers 方程,可取$(E,F)=(\frac{1}{2}u^2,\frac{1}{3}u^3)$,对于 Euler 方程,可取$(E,F)=(-\rho S,-\rho uS)$。但 E 的选取并不唯一。可以证明,严格凸函数 E 为熵的充要条件是,矩阵 $E''\boldsymbol{A}$ 对称。

如果对任何熵对(E,F),下面的熵条件

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\leqslant 0 \tag{2-50}$$

都在弱解意义下成立,即对所有试验函数 $\phi\in C_0^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)^m, \phi\geqslant 0$,有:

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(E\frac{\partial\phi}{\partial t}+F\frac{\partial\phi}{\partial x})\mathrm{d}x\mathrm{d}\,t-\int_{-\infty}^{\infty}E(x,0)\phi(x,0)dx\leqslant 0$$

则称弱解为可以接受的解(有物理意义的解或熵解)。

设(E,F)为熵对并令分段光滑函数 $\boldsymbol{w}$ 为(2-1)的弱解。可以证明,$\boldsymbol{w}$ 满足熵条件的充要条件是在解间断处满足下面跳跃条件②:

---

① 函数称为严格凸函数,如果 $\psi''=\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}^2}$是正定矩阵。

② 因(2-51)是不等式,所以要非常注意跳跃$\langle E\rangle=E_r-E_l$ 的定义。这里,跳跃指间断右边值减左边值,而右边定义在正轴方向。

$$\langle F(w)\rangle \leqslant s'\langle E(w)\rangle \tag{2-51}$$

这里，s' 为间断的移动速度。

对于一维标量双曲方程，熵解是唯一的，但对于系统，熵解可能不唯一。

有时，使用下面的 Lax-熵条件更方便：弱解为熵解的充要条件是，存在一个指标 k，使得 $\lambda^{(k)}(w_L)>s'>\lambda^{(k)}(w_R)$。

用 Lax-熵条件很容易验证，前面提到的膨胀激波不满足熵条件，也可以选取 $(E,F)=(\frac{1}{2}u^2,\frac{1}{3}u^3)$，证明膨胀激波不满足不等式(2-51)。

第六节 边界条件

实际问题的计算一般是针对有限区域的，因此在区域的边界上需要给定边界条件。边界条件不能随意给定，它要求在数学上满足适定性，在物理上具有明显的意义。在实际计算中，边界的处理很重要，但详细的讨论超出了本书的范围，这里只能介绍某些重要概念。

一、边界的选取

边界可分为物理边界和人工边界两种。物理边界是由问题的性质决定的，从而是固定的。例如，流体力学中的外流问题的固体壁面和内流问题的进、出口边界都是物理边界。物理边界上流动的物理性质很明确，或可通过实验测量到，所以物理边界条件的定义比较直观。人工边界是针对无限或半无限区域，或我们感兴趣的范围永远小于实际区域时而人为引入的。例如，当计算汽车发动机汽缸里的流动时，没有必要对长度永远大于汽缸尺寸的整个进气道和尾喷管里的流动同时进行计算，而可把边界人为地选在距汽缸比较近的地方。当计算外流问题时，尽管实际区域延伸至无限远，可以把外边界选在距固体边界有限远的地方。人工边界的选取带有任意性和经验性，边界条件的给定往往更多的是从数学上考虑，如适定性或无反射。实际上，无限远边界的处理可以有 4 种方法：

(1) 区间变换法　通过坐标变换，将无限区域变换成有限区域。这种方法的缺点是，坐标变换会产生奇点或引起解的震荡，所以在实际计算中很少使用。

(2) 有限截断法　将外边界选在足够远的地方直接用无限远的条件。例如，对于流动问题，在流体流入部分用起动流条件(即用无限远处的熵和总焓)而在流出部分给无限远处的压力，这种方法很实用。

(3) 小扰动方法　将外边界先在某个地方，使得在人工边界以外的区域可用小扰动法求出近似解，作为边界条件。

(4) 解析边界法　将边界选在某个地方，根据纯数学上的考虑构造某种解析边界条件，如无反射边界条件。假设人工边界处于 $x=0$，计算区域定义在 $x>0$，令 l 为雅可比矩阵 $\mathbf{A}$ 正特征值的个数，如果边界条件定义为：

$$l^{(k)}\frac{\partial w}{\partial t}=0,\quad k=1,2,\cdots,l$$

则对于向左传播的一维简单波，人工边界不会产生任何反射；对于向左移动的强度为 ε 激波，只产生强度为 $O(\varepsilon^3)$ 的反射波。

二、一般边界条件的构造要求

考虑半区间 $x>0$ 上的展开系统

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}=\boldsymbol{F}(x,t),\quad t\geqslant 0,x\geqslant 0 \tag{2-52}$$

与初始条件

$$\boldsymbol{w}(x,0)=\boldsymbol{w}_0(x),x\geqslant 0 \tag{2-53}$$

在下面的分析中，假定 $\mathbf{A}$ 为常数，但结论对于 $\mathbf{A}$ 不为常数的情况也适应。

一般情况下，在 $x=0$ 处需要定义边界条件，称为解析边界条件。因方程(2-1)只含有一次微分，所以相应的边界条件为狄利克莱型，暂时把边界条件写成一般形式：

$$\boldsymbol{Lw}(0,t)=\boldsymbol{g}(t),t\geqslant 0 \tag{2-54}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{w})$ 为 $l\times m$ 矩阵，l 为边界条件的个数，下面将看到，l 必须等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正特征值的个数。

初始条件(2-53)与边界条件必须满足相容性条件 $\boldsymbol{Lw}_0(0)=\boldsymbol{g}(0)$。

由方程(2-52)～(2-54)定义的问题称为混合初边值问题。因区间在(x,t)平面上占四分之一，所以也称四分之一平面问题(quarter-plane problem)。当问题定义在有限区间 $x\in(0,1)$上时，在 $x=1$ 处也须定义边界条件，但在不同边界上的边界条件可以单独给定，而不需考虑它们之间的相互作用。更严格地说，当给 $x=0$ 处的边界条件时，可假定边界 $x=1$ 不存在而令 $x\in(0,\infty)$；当给 $x=1$ 处的边界条件时，可假定边界 $x=0$ 不存在而令 $x\in(-\infty,1)$。区间$(-\infty,1)$又可通过坐标变换切换到$(0,\infty)$，因此理论上只须考虑四分之一平面问题。

边界条件的构造是从混合初边值问题的适定性考虑的。与柯西问题类似，适定性包括三个问题：解的存在、解的唯一和解对(初始条件、源项和边界值)小扰动的稳定性。

研究初边值问题的适定性有特征值法、能量法和正规模态分析三种方法，这里只介绍特征值法。

标量方程($m=1$)　此时，可将方程(2-52)写成$\frac{\partial w}{\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}=0$，相应的解在特征线 $x-ct=$ Const. 上为常数，即 $w(x,t)=w_0(x-ct)$。据此可分成三种情况：(1) $c<0$(出流边界)，对应任意时刻 $t>0$ 任意坐标点 $x\geqslant 0$ 的解 w 完全由 $x-ct$ 处的初始值确定，所以不须任何边界条件；(2) $c=0$ (特征边界)，对应任意时刻 $t>0$ 任意坐标点 $w>0$ 的解 w 完全由 x 处的初始值确定，一般按 $c>0$ 处理；(3) $c>0$(入流边界)，对应满足 $x-ct<0$ 的点 x 解满足关系式 $w(x,t)=w(0,t_i)$，$t_i=-(x-ct)/c$，因而需要给边界条件：

$$w(0,t)=g(t),t\geqslant 0\quad 如果\, c\geqslant 0 \tag{2-55}$$

其中边界给定值 $g(t)$要求足够光滑，假设当 $c<0$ 时也给边界条件(2-55)，此时 $w(0_-,t)=w_0(x_\epsilon)|_{\epsilon\to 0}=w_0(-ct)$。一般情况下，$w_0(-ct)\neq \boldsymbol{g}(t)$。于是，多余的边界条件导致 $w(0,t)\neq w(0_-,t)$，即解不能连续依赖边界数据，因而不适定。假设当 $c>0$ 时不给边界条件(2-55)，则解不能唯一确定，因而不适定。

对角系统($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Lambda}$)　为了方便，令 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}^I,\boldsymbol{\Lambda}^{II})$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}^I=\mathrm{diag}(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(l)})\geqslant 0$，$\boldsymbol{\Lambda}^{II}=\mathrm{diag}(\lambda^{(l+1)},\lambda^{(l+2)},\cdots,\lambda^{(m)})<0$。将(2-52)分解成

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^I}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}^I\frac{\partial \boldsymbol{w}^I}{\partial x}=0,\boldsymbol{w}^I=(w^{(1)},w^{(2)},\cdots,w^{(l)})^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^{II}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}^{II}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{II}}{\partial x}=0,\boldsymbol{w}^{II}=(w^{(l+1)},w^{(l+2)},\cdots,w^{(m)})^{\mathrm{T}}$$

因方程的各分量相互独立，所以根据前面标量方程的分析，正确的边界条件为：

$$\boldsymbol{w}^I(0,t)=\boldsymbol{g}^I(t),t\geqslant 0 \tag{2-56}$$

简单的说，对每个入流特征变量，应给边界条件。另外，w^{II}的方程是自封闭的而且不需边界条件，所以可以把边界条件(2-56)换为

$$w^I(0,t) = Sw^{II}(0,t) + g^I(t), t \geqslant 0 \tag{2-57}$$

这里S为任意有界$l \times (m-l)$矩阵。从几何上将，边界条件(2-57)可理解为出流分量w^{II}在边界上被部分反射，转化成入流分量w^I。

一般双曲系统　设T为A的对角化矩阵，即

$$T^{-1}AT = \Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda^I, \Lambda^{II}), \quad \Lambda^I \geqslant 0, \Lambda^{II} < 0$$

定义特征变量$w_c = T^{-1}w$。于是(2-52)变为$\frac{\partial w_c}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w_c}{\partial x} = 0$，相应的边界条件可写成

$$w_c^I(0,t) = Sw_c^{II}(0,t) + g^I(t) \tag{2-58}$$

也可等价地写成

$$(T^{-1}w)^I = S(T^{-1}w)^{II} + g^I \tag{2-59}$$

这里w_c^I和w_c^{II}分别对应Λ的正负特征值。

一般边界条件　在实际问题中，边界值往往由设计要求或试验测量给出，从而将边界条件直接写成

$$X^I(0,t) = GX^{II} + g(t) \tag{2-60}$$

这里，$X = (X^I, X^{II})^T$是可与w相异的变量，X^I包含的分量个数与A的非负特征值个数相等。例如，对于Euler方程，往往将边界条件定义在变量H, S和p上，从而可取$X = (H, S, p)^T$。为使(2-60)满足适定性要求，必须证明它等价于(2-58)。令

$$\begin{pmatrix} w_c^I \\ w_c^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^I \\ X^{II} \end{pmatrix} \tag{2-61}$$

并令$\overline{Q}_2 = Q_2 + Q_1G$和$\overline{Q}_4 = Q_4 - Q_3G$，则有

$$W^I = Q_1X^I + Q_2X^{II} = Q_1g(t) + \overline{Q}_2X^{II}, W^{II} = Q_3X^I + Q_4X^{II} = Q_3g(t) + \overline{Q}_4X^{II}$$

如果$\overline{Q}_4$为空矩阵($l = m$)，则由(2-61)可得$w_c^I = Q_1g(t)$。如果$\overline{Q}_4$非空并且可逆，则由(2-61)得$w_c^I = Sw_c^{II} + g'(t)$，其中

$$S = \overline{Q}_2Q_4^{-1}, g'(t) = (Q_1 - \overline{Q}_2\overline{Q}_4^{-1}Q_3)g(t)$$

因此，边界条件(2-61)保证适定的充要条件是，$Q_4 + Q_3G$为空矩阵或可逆矩阵。

三、Euler 方程的边界条件

令$A_p = M^{-1}AM, \Lambda = T^{-1}A_pT$。于是有

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{(\gamma-1)u^2}{2} & (1-\gamma)u & (\gamma - 1) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{\rho c} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0=\text{Const}$，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0=\text{Const}$，定义特征变量 $\boldsymbol{w}_c=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{w}_p=\begin{pmatrix}\rho-\frac{1}{c_o^2}p\\ u+\frac{1}{\rho_0c_0}p\\ u-\frac{1}{\rho_0c_0}p\end{pmatrix}$ 其中

$$\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{T}_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{c_o^2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho_0c_o}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{\rho_0c_o}\end{pmatrix}$$

先考虑如何将边界条件定义在基本变量 $\boldsymbol{X}=(\rho,u,p)$ 上。

亚声速入流（$0<u_0<c_o$） 此时，$\boldsymbol{A}$ 的前两个特征值为正，第三个特征值为负，所以应取 $\boldsymbol{w}_c^I=(w_c^{(1)},w_c^{(2)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w}_c^{II}=w_c^{(3)}$。另外有：

$$\begin{pmatrix}w_c^{(1)}\\ w_c^{(2)}\\ w_c^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{c_o^2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho_0c_o}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{\rho_0c_o}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}$$

(*a*) 如果取 $\boldsymbol{X}^I=(u,p)$，$\boldsymbol{X}^{II}=\rho$，即对 u 和 p 给边界条件，则 $\boldsymbol{Q}_4=0$，于是 $\boldsymbol{Q}_4$ 不可逆，从而问题不适定。

(*b*) 如果取 $\boldsymbol{X}^I=(\rho,u)$，$\boldsymbol{X}^{II}=p$，即对 ρ 和 u 给边界条件，则 $\boldsymbol{Q}_4=\frac{1}{\rho_0u_0}$，于是 $\boldsymbol{Q}_4$ 可逆，从而问题适定。

(*c*) 如果取 $\boldsymbol{X}^I=(\rho,p)$，$\boldsymbol{X}^{II}=u$，即对 ρ 和 p 给边界条件，则 $\boldsymbol{Q}_4=-1$. 于是 $\boldsymbol{Q}_4$ 可逆，从而问题适定。

超声速入流（$u_0>c_o>0$） 此时所有特征值为正，对 ρ，u 和 p 都给边界条件，相应地，$\boldsymbol{Q}_4$ 为空矩阵，从而问题适定。

亚声速出流（$0>u_0>-c_0$） 此时只有第二个特征值为正，应取 $\boldsymbol{w}_c^I=w_c^{(2)}$，$\boldsymbol{w}_c^{II}=(w_c^{(1)},w_c^{(3)})^{\mathrm{T}}$，于是有

$$\begin{pmatrix}w_c^{(2)}\\ w_c^{(1)}\\ w_c^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{1}{\rho_0c_0}\\ 1 & 0 & \frac{-1}{c^2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho_0c_o}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}$$

如果取 $\boldsymbol{X}^I=\rho$，$\boldsymbol{X}^I=u$ 和 $\boldsymbol{X}^I=p$，则分别有

$$\boldsymbol{Q}_4=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1}{c_o^2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\,\rho_0c_o}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}_4=\begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{c_o^2}\\ 0 & -\frac{1}{\rho_0c_o}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

并且对所有情况 Q_4 均可逆，从而可将边界条件定义在 ρ,u 和 p 中的任一个上。

超声速出流($u_0<-c_o$)　此时所有特征值为负，不要给任何边界条件，并且有 $Q_4=T^{-1}$，由双曲性定义，T^{-1}可逆。

最后介绍在外流计算中大量使用的一种边界条件：在亚声速入流部分取 $X^I=(H,S)$，在亚声速出流部分取 $X^I=p$。这里只考虑亚声速入流边界条件的适定性，将 $H=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}$和 $S=\frac{p}{\rho^\gamma}$线性化后，即令

$$H=-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0^2}\rho+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_0}p+u_0u=-\frac{1}{\gamma-1}\frac{c_o^2}{\rho_0}w_c^{(1)}+\frac{1}{2}(u_0+c_o)w_c^{(2)}+\frac{1}{2}(u_0-c_o)w_c^{(3)}$$

$$S=-\gamma\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma+1}}\rho+\frac{1}{\rho_0^\gamma}p=-\frac{c_o^2}{\rho_0^\gamma}w_c^{(1)}$$

便可将边界条件写成

$$w_c^{(1)}=g_a(t),w_c^{(2)}=(c_o-u_0)/(c_0+u_0)w_c^{(3)}+g_b(t)$$

因 $u_0>0$，所以该条件具有一般形式(2-58)，即问题适定。

第七节　高维问题

实际流动都是一个高维问题，目前尚无严格的理论可依据，因而在处理高维问题时，往往采用一维类推，即把每个方向看成一个维问题，直接使用一维理论。

考虑一阶微分系统$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}=\boldsymbol{P}(\partial/\partial x)\boldsymbol{w}$，其中 $\boldsymbol{P}(\partial/\partial x)=\sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{A}_j\frac{\partial}{\partial x}$，$\boldsymbol{A}_j$ 为 $m\times m$ 矩阵。引入符号 $\boldsymbol{P}(\omega)=\sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{A}_j\omega_j$，其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_d)$。如果对所有 $\omega\in\mathbf{R}^d$，$|\omega|=1$，$\mathbf{P}(\omega)$的所有特征值均为实数，且 $\boldsymbol{P}(\omega)$可以对角化，则该系统称为双曲系统。进一步，如果 $\boldsymbol{P}(\omega)$的特征值两两互异，则为狭义双曲系统，例如，二维和三维 Euler 方程均为双曲系统，但不是狭义双曲系统。

对于高维双曲系统，前面的黎曼分析一般不再成立。但弱解和熵条件可进行与一维问题相类似的定义。

设间断由曲面 $C(x_1,x_2,\cdots,x_d,t)=0$ 定义。则与一维问题类似，间断左右的状态满足 Rankine-Hugoniot 跳跃条件：

$$\langle w\rangle\frac{\partial C}{\partial t}+\langle f_j\rangle\frac{\partial C}{\partial x_j}=0$$

设 $E=E(\boldsymbol{w})$为严格凸函数，$F_j=F_j(E)$，$j=1,2,\cdots,d$ 满足协调关系式$\frac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\boldsymbol{A}_j$。则在间断处熵条件可表述为

$$\langle E\rangle\frac{\partial C}{\partial t}+\langle F_j\rangle\frac{\partial C}{\partial x_j}\leqslant 0$$

在应用中，往往需要对方程进行坐标变换，令笛卡尔坐标系中的方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}_j}{\partial x_j}=0 \tag{2-62}$$

考虑坐标变换：

$$\tau=t$$
$$\xi_j=\xi_j(x_1,x_2,\cdots,x_d,t),j=1,2,\cdots,d$$

在新的坐标系中，方程(2-62)变为：

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}-\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial \xi_j}+\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}=0 \tag{2-63}$$

如果变换矩阵 $J=(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j})$ 可逆并且解光滑，那么式(2-63)和式(2-62)是等价的。如果有间断解，但系统(2-63)不守恒，不能用来描述有间断的情况。为了正确描述间断解，应将(2-63)写成如下的守恒形式：

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{w}{J})+\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\frac{f_j^*}{J})=0 \tag{2-64}$$

其中 $f_j^*=\frac{\partial \xi_j}{\partial t}w+\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}f_i$。可以证明，方程(2-64)与式(2-62)具有相同的弱解。

参考文献

[1] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math., 18: 697-715, 1965

[2] Kreiss H.-O. and Lorenz J. Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations. Academic Press Inc., 1989

[3] Kreiss H.-O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. Comm. Pure Appl. Math., 23:277-298, 1970

[4] Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure Appl. Math., 7:159-193, 1954

[5] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math., 10:159-193, 1957

[6] Sever M. Uniqueness failure for entropy solutions of hyperbolic systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 42:173-183, 1989

第三章　Euler 方程和 N-S 方程的数值计算方法

采用 Euler 方程式 N-S 方程作为主控方程来计算无粘流场和粘性流场是目前数值模拟复杂流场的主要方法，也是计算流体力学的重要研究领域，从而形成了计算流体力学近一、二十年来讨论的中心议题。解决好 Euler 方程的计算方法实际上也就奠定了 N-S 方程计算的基础。

非定常 Euler 方程组是双曲型方程组，如何处理好计算空间中可能产生的间断面，即在流场中可能产生的激波，这一问题是构造求解该方程的计算方法的核心技术。目前已有的计算方法绝大多数是采用时间相关法取得定态流动解，对流场中可能存在的激波是自动捕捉的。采用这种方法相对激波装配法的优点在于：①简单；②采用一种计算方法和计算程序既可计算定态解亦可计算非定态解；③更容易发展成矢量计算或并行计算。在构造此类方法时必须考虑到以下原则：(1) 数值离散的方程必须满足气体动力学的守恒律；(2) 必须能自动捕捉到激波和接触间断面；(3) 定态解必须与时间分步积分的形式无关；(4) 流场中的不变量在数值解中仍必须是不变量；(5) 均匀流必须是任意网格中差分方程的正确解之一。

满足上述原则(3) 的一种简便办法是采用半离散方法。这种方法将空间离散的积分和时间的推进完全分开，可使空间离散的误差、人工粘性和捕捉激波的精度等与时间推进的稳定性、收敛的加速性等无关。例如半离散的有限体积法可使最后的收敛解与时间推进的步长无关。有限体积法是目前空间离散常用的一种方法，只要正确地估算转换矩阵的导数，物理空间中有限体积的通量求和即等价于在贴体坐标系中强守恒形式流体动力学方程的有限差分解。

求解 Euler 方程的数值格式通常以该方程在空间离散时所采用的型式分类，一般可分成迎风型和中心型两大类格式，迎风型格式的早期典型是 Lax 和 Godunov 格式，实际上是用特征线构成的格式，迎风格式的计算精度低，只有一阶，且由于格式的耗散性，使激波在几个网格的距离内被抹平了。但迎风格式具有计算解是单调的，不会发生振荡这一突出特点。中心差分格式具有二阶精度，可以较正确地给出激波的位置，减弱了激波抹平现象，但解却丧失了单调特性，在激波处出现了振荡现象。著名的 Lax-Wendroff 格式可作为此类格式的代表。早在 1959 年 Godunov 就证明了常系数的单调差分格式的截断误差只能是一阶的[1]，随后 Harten，Hyman 和 Lax 也证明了非线性的单调差分格式的截断误差也只能达到一阶[2]，因而构成一个既能保持解的单调性，又具有高阶精度的数值格式就成了近一、二十年来计算流体力学工作者努力的目标。构成这样的差分格式也是实现数值模拟复杂流动的根本。目前已发展了不少求解 Euler 方程的很好的数值计算格式。后面将分别对中心型、迎风偏值型和 TVD 型等格式加以介绍。

目前求解 N-S 方程计算方法通常是将对流项按 Euler 方程的离散方式处理，而粘性通量则以中心差分进行离散。在对流项离散格式中隐式或显式地引入的人工粘性也必然给 N-S 方程的求解带来一定的影响；此外，求解 N-S 方程对网格的要求远比求解 Euler 方程的高，因此寻求求解 N-S 方程的高分辨率的数值格式是当前非常重要的而紧迫的任务[3]。



第一节　中心型差分格式

采用中心型差分格式计算的解在激波处有振荡，需显式添加人工粘性项来消除这种振荡。如何

处理所加的人工粘性就成了中心型各差分格式的重要特征。目前实际计算中最有代表性的中心型数值方法是 Jameson 等(1981)最先提出的[4]。下面对它作简单的介绍和讨论。

一、标量人工粘性的中心差分方法

为简单起见,现以二维流动的 Euler 方程来讨论,二维流动的 Euler 方程在笛卡尔坐标下可写成

$$\boldsymbol{W}_t + \boldsymbol{f}_x + \boldsymbol{g}_y = 0 \tag{3-1}$$

其中

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vh \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}, \quad \rho h = \rho e + p$$

将方程(3-1)变换至任意曲线坐标系 $\xi(x,y)$,$\eta(x,y)$内,则可得

$$(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{W})_t + \boldsymbol{F}_\xi + \boldsymbol{G}_\eta = 0 \tag{3-3}$$

其中 $\boldsymbol{J}^{-1}$是 Jacobian 变换矩阵的逆阵,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} y_\eta - \boldsymbol{g} x_\eta, \boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} x_\xi - \boldsymbol{f} y_\xi$$

若将积分域分成很多个有限体积单元,并假定单元体积不随时间变化,采用对单元中心的有限体积方法就可将方程(3-3)在每一单元内积分完成空间的离散而得到一组半离散的随时间推进的方程组,其第 k 个单位的方程为:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_k}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{Q}_k / \Omega_k \tag{3-4}$$

Ω_k 是第 k 单元的体积,等于 $\boldsymbol{J}^{-1}$,$\boldsymbol{Q}_k = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_\xi + \boldsymbol{B}\boldsymbol{W}_\eta)$、$\boldsymbol{A} = \partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{B} = \partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{W}$。$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为通量的 Jacobian 矩阵。

这样的空间离散格式是非耗散的,无法阻尼掉计算中可能产生的任何误差。因而在定态介中将存在振荡。为防止出现振荡,在方程(3-4)右端项中需加入人工粘性项,即对于第 k 个单元,方程(3-4)变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_k}{\mathrm{d}t} = -(\boldsymbol{Q}_k - \boldsymbol{D}_k)/\Omega_k = \boldsymbol{R}_k \tag{3-5}$$

Jameson 等最先提出的人工粘性项是二阶和四阶差分的组合,即

$$\boldsymbol{D}_k = (D_\xi^{(2)} + D_\eta^{(2)} - D_\xi^{(4)} - D_\eta^{(4)})\boldsymbol{W}_k \tag{3-6}$$

其中

$$D_\xi^{(2)}\boldsymbol{W}_k = \nabla_\xi[(\lambda_{i+1/2,j} \cdot \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)})\Delta_\xi]\boldsymbol{W}_{i,j}$$

$$D_\xi^{(4)}\boldsymbol{W}_k = \nabla_\xi[(\lambda_{i+1/2,j} \cdot \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)})\Delta_\xi\nabla_\xi\Delta_\xi]\boldsymbol{W}_{i,j} \tag{3-7}$$

Δ_ξ 和 ∇_ξ 分别为 ξ 方向的前差和后差算子,尺度因子 λ 为:

$$\lambda_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}[(\lambda_\xi)_{i,j} + (\lambda_\xi)_{i+1,j} + (\lambda_\eta)_{i,j} + (\lambda_\eta)_{i+1,j}] \tag{3-8}$$

其中谱半径 λ_ξ 和 λ_η 正比于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的最大特征值,分别有:

$$\lambda_\xi = |uy_\eta - vx_\eta| + c\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}, \lambda_\eta = |vx_\xi - uy_\xi| + c\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} \tag{3-9}$$

u,v 分别是笛卡尔坐标中 x,y 方向的速度分量，c 是声速。

系数 $\varepsilon^{(2)}$ 和 $\varepsilon^{(4)}$ 是调节系数，根据流场中压强变化的大小加以调节。激波感受因子 ν 起开关函数作用。它们分别为：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j} &= K^{(2)}\max(\nu_{i-1,j},\nu_{i,j},\nu_{i+1,j},\nu_{i+2,j}) \\
\nu_{i,j} &= \left|\frac{p_{i+1,j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}}{p_{i+1,j}+2p_{i,j}+p_{i-1,j}}\right| \\
\varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j} &= \max[0,(K^{(4)}-\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j})]
\end{aligned}
\tag{3-10}
$$

其中 p 为压强，$K^{(2)}$ 和 $K^{(4)}$ 是根据经验给定的常数，一般 $\frac{1}{2}<K^{(2)}<1.0$，$\frac{1}{250}<K^{(4)}<\frac{1}{32}$。多重网格计算时常取 $K^{(2)}=\frac{1}{2}$，$K^{(4)}=\frac{1}{64}$。方程(3-6)中沿 η 方向的运算可类似地处理。

上述人工粘性项中的二阶差分人工粘性项相当于在方程中引入了一个熵条件，目的是抑制解在激波附近的振荡，在流场的连续区域内此项作用甚小。四阶差分人工粘性项的作用主要是阻尼高频误差，并使解趋于定态。

对常微分方程组(3-5)进行时间的积分即可获得定态解。这可用多步 Runge-Kutta 法完成。以四步 R-K 法为例，要写成

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}^{(0)} = \boldsymbol{W}^{(n)} \\
&\boldsymbol{W}^{(m)} = \boldsymbol{W}^{(0)} + \alpha_m\Delta t(\boldsymbol{R}^{(m-1)}), \qquad m = 1\sim 4 \\
&\boldsymbol{W}^{(n+1)} = \boldsymbol{W}^{(4)}
\end{aligned}
\tag{3-11}
$$

其中(n)表示当前时间步，$(n+1)$为新的时间步，(m)为 R-K 法中第 m 步，$\boldsymbol{R}^{(m-1)}=-(\boldsymbol{Q}^{(m-1)}-\boldsymbol{D}^{(0)})/\boldsymbol{\Omega}$，系数 $\alpha_1=1/4,\alpha_2=1/3,\alpha_3=1/2,\alpha_4=1$。为了减少计算时间，只在第一个时间步上计算人工粘性项，并将其值冻结于随后的时间步上。Jameson 说明了这样会改变格式的稳定区域，但不会影响解的精度和收敛特性。四步 R-K 法用于非定常 Euler 方程时允许的最大 CFL 值为 $2\sqrt{2}$。

求解 N-S 方程时，目前常用五步 R-K 法，其第 $m+1$ 步可写作

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{W}^{(m+1)} = \boldsymbol{W}^{(0)} - \alpha_{m+1}\Delta t[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{W}^{(m)}) - \sum\limits_{r=0}^{m}\gamma_{mr}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{W}^{(r)})] \\
\boldsymbol{Q}(W^{(m)}) = \boldsymbol{Q}_c(W^{(m)}) + \boldsymbol{Q}_d(\boldsymbol{W}^{(0)})
\end{cases}
\tag{3-12}
$$

其中 γ_{mr} 是人工粘性的加权因子。下标 c 和 d 分别代表对流项和物理粘性项。系数 α_{m+1} 应使方程组获得最大可能的双曲稳定范围，一般可取 $\alpha_1=1/4,\alpha_2=1/6,\alpha_3=3/8,\alpha_4=1/2,\alpha_5=1$。这样可获得很好的高频阻尼特性，有利于多重网格方法的快速收敛。计算中可只在第一、三、五步上计算人工粘性项。加权因子 γ_{mr} 必须满足

$$
\sum\gamma_{mr} = 1 \tag{3-13}
$$

它们分别可取

$$
\left.
\begin{aligned}
&\gamma_{00} = 1 \\
&\gamma_{10} = 1, \quad \gamma_{11} = 0 \\
&\gamma_{20} = \Gamma_3, \quad \gamma_{21} = 0, \quad \gamma_{22} = \bar{\gamma}_3 \\
&\gamma_{30} = \Gamma_3, \quad \gamma_{31} = 0, \quad \gamma_{32} = \bar{\gamma}_3, \quad \gamma_{33} = 0 \\
&\gamma_{40} = \Gamma_3\cdot\Gamma_5, \gamma_{41} = 0, \quad \gamma_{42} = \bar{\gamma}_3\Gamma_5, \quad \gamma_{43} = 0, \quad \gamma_{44} = \bar{\gamma}_5
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-14}
$$

其中 $\Gamma=(1-\bar{\gamma}_3)$，$\Gamma_5=(1-\bar{\gamma}_5)$，$\bar{\gamma}_3=0.56$，$\bar{\gamma}_5=0.44$。物理粘性项仅在第一步上计算，并将其值冻结于以后计算步中，这并不太影响整个计算格式的稳定性，却可节省大量计算时间。

这种显式格式的最大缺点是由于稳定性限制使允许的最大时间步长较小。为加速收敛可采取如下措施：

(1) 各网格点选用当地时间步长。

(2) 采用残值光滑技术。即各网格点处的残值由其周围各点残值的加权平均值替代。这种平均是隐式地计算的，例如一维时 j 点的 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W})$ 由 $\overline{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{W})$ 替代，即

$$-\varepsilon\overline{\boldsymbol{R}}_{j-1}+(1+2\varepsilon)\overline{\boldsymbol{R}}_j-\varepsilon\overline{\boldsymbol{R}}_{j+1}=\boldsymbol{R}_i \tag{3-15}$$

ε 应选得足够大，在一维情况下，$\varepsilon\geqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta t^*}\right)^2-1\right]$，$\Delta t$ 为实际时间步长，Δt^* 为原基本格式的时间步长。若取 $\frac{\Delta t}{\Delta t^*}=3$，即 $\varepsilon=2$，则实际上仍可保持稳定又获得了最快的收敛速度。这种光滑技术可使CFL值提高到未光滑时值的2～3倍。对于多维情况，可采用乘积形式，如对于三维情况，(3-15)式变为

$$(1-\varepsilon_x\delta_x^2)(1-\varepsilon_y\delta_y^2)(1-\varepsilon_z\delta_z^2)\overline{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R} \tag{3-16}$$

其中 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 为光滑系数，$\delta_x^2,\delta_y^2,\delta_z^2$ 为二阶差分算子。

(3) 采用焓阻尼技术。若流动是等焓流动，则可假定守恒变量 $\boldsymbol{W}$ 的变化速率与当地焓值和无穷远处焓值(常值)的差呈正比关系，于是

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\beta\boldsymbol{W}(h-h_\infty)=0 \tag{3-17}$$

其中 β 是给定的常数。在每个时间步的最后一步通过

$$\boldsymbol{W}-\overline{\boldsymbol{W}}+\beta\Delta t\boldsymbol{W}(\bar{h}-h_\infty)=0 \tag{3-18}$$

可隐式计算 $\boldsymbol{W}$ 值。式(3-18)中的 $\overline{\boldsymbol{W}}$ 表示每一时间步结束时的 $\boldsymbol{W}$ 值，$\boldsymbol{W}$ 则是改进后的新值。$\boldsymbol{W}$ 的分量(ρe)应修正为：

$$(\rho e)-(\bar{\rho}\bar{e})+\beta\Delta t[\rho e+\bar{p}-\bar{\rho}h_\infty]=0 \tag{3-19}$$

大量数值实践表明此方法非常有效，现已广泛用于求解各种流动状态的Euler方程和N-S方程。此技术不仅可用于结构网格，亦可用于非结构网格，现正逐渐被各航空公司引用到工业设计工作中。图3-1给出了一种战斗机外形在 $Ma_\infty=0.95$，$\alpha=15°$ 情况下Euler方程解计算的上表面及一横截面上的等马赫线分布图。图3-2给出了从机身和机翼前缘出发的流线轨迹线。由图可清楚看出流场的涡系结构。图3-3给出了Jameson等早期(1986年)计算的747-200全机的表面等压线分布。计算的 $Ma_\infty=0.84$，$\alpha=2.73°$，发动机模型是通气模型。计算是在非结构网格中进行的，采用了共24685个网格节点数及132793个四面体。尽管网格是很粗的，但流场的主要特点还是很清楚的，显示出了机翼、尾翼与机身的相互干扰影响，显示出了机翼挂架及短舱的相互干扰影响等，表明了此方法的适用性。图3-4给出了Northrop公司计算YF-23样机的表面网格和空间网格。图3-5给出了用

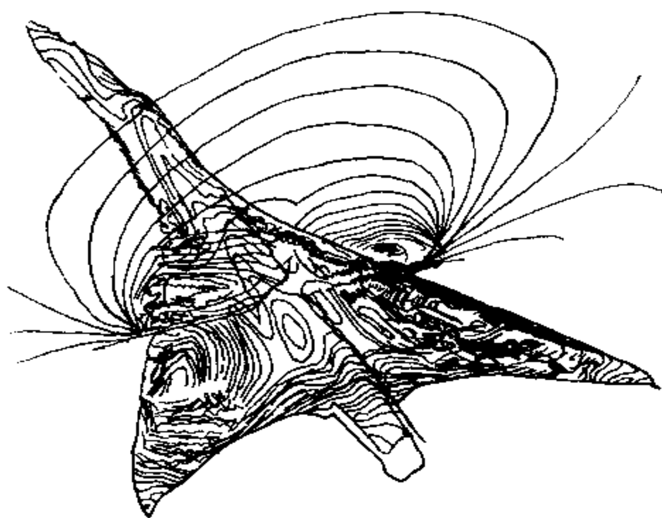
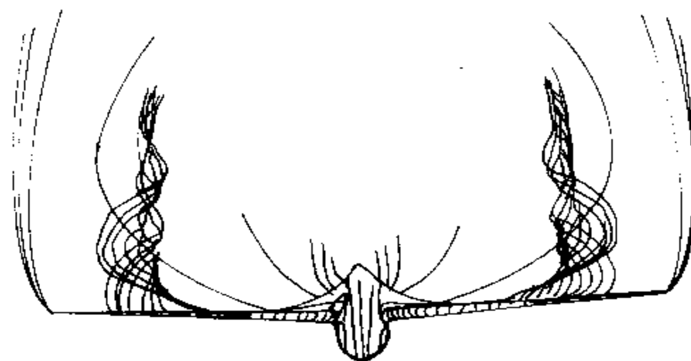
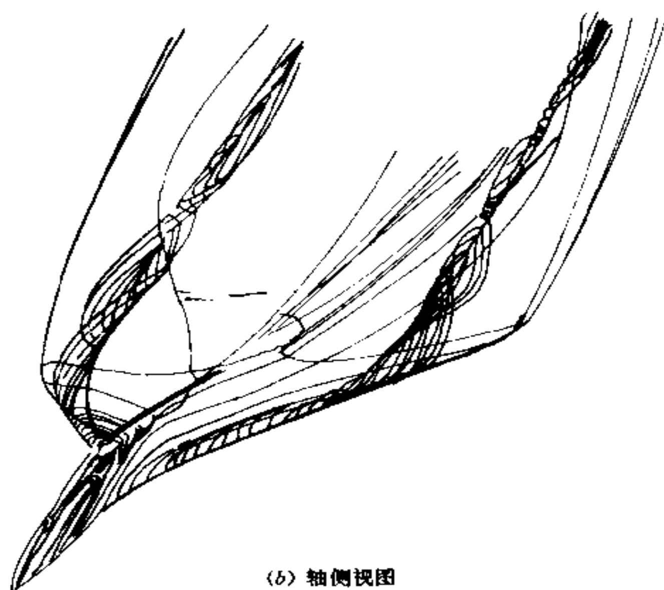


图3-1　一种战斗机外形上表面及一横截面上的等 Ma 线分布



(*a*) 前视图



(*b*) 轴侧视图

图 3-2 Euler 方程解的流线轨迹图 $Ma_{\infty}=0.95, \alpha=15°$

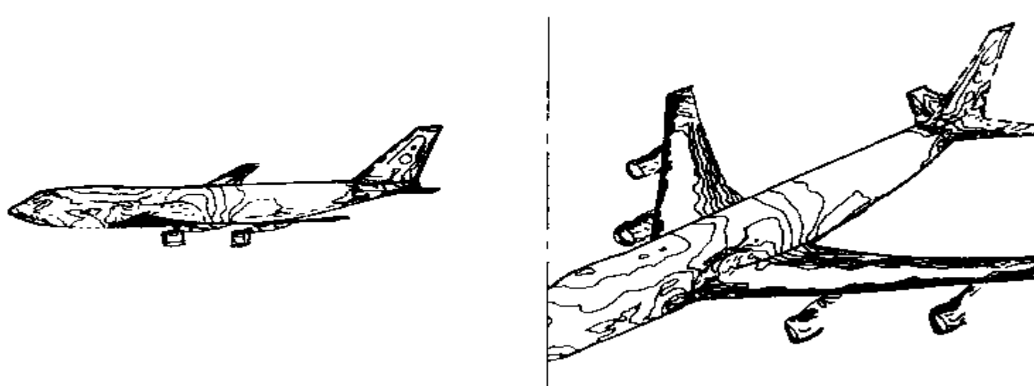


图 3-3 747-200 全机表面等压线分布 $Ma_{\infty}=0.84, \alpha=2.73°$

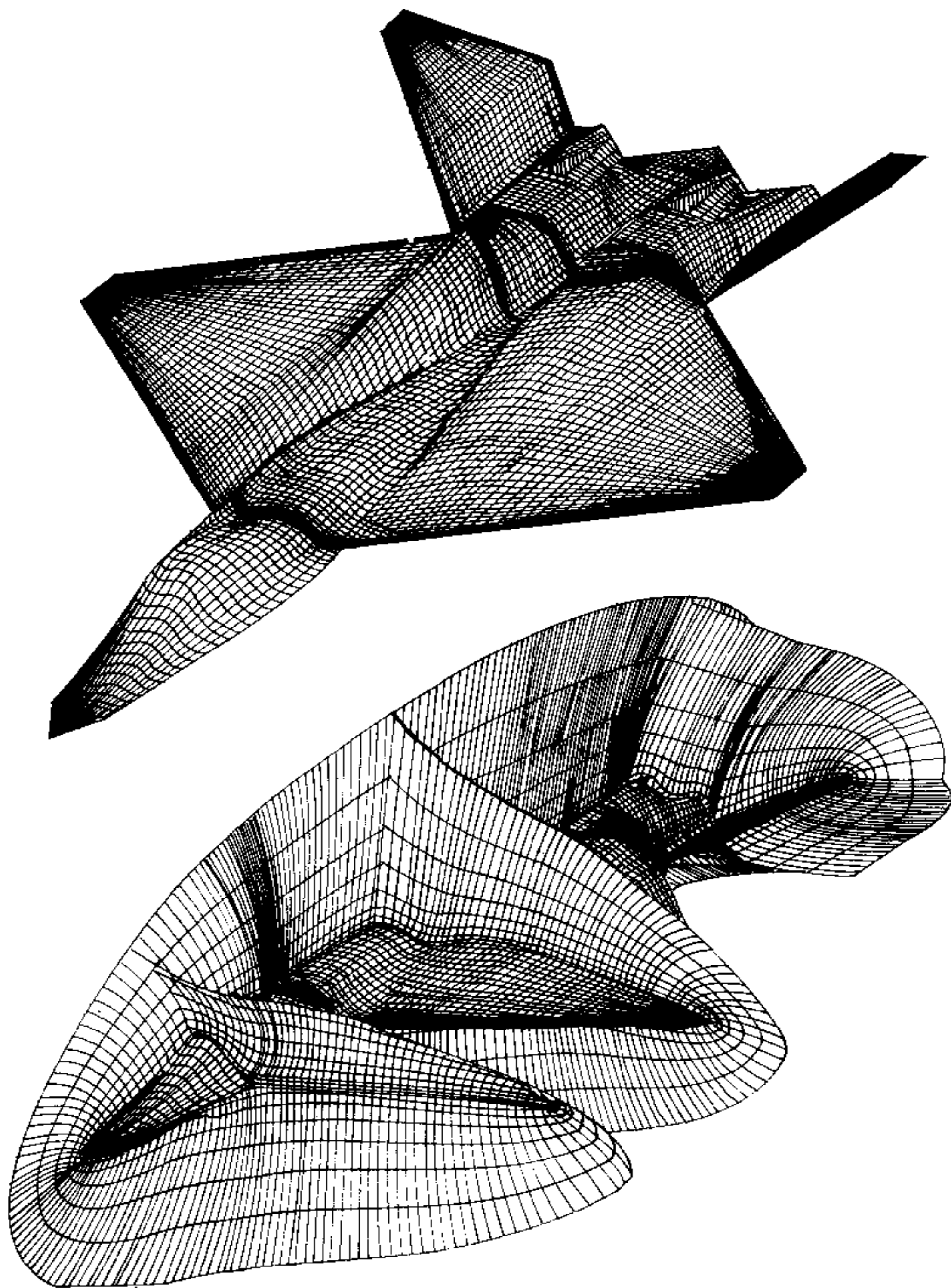


图 3-4　YF-23 样机的表面和空间网格

此方法在 $Ma_\infty=0.9, \alpha=16.0°$情况下计算的沿机身轴向的压强分布与实验值的比较。图 3-6 给出了升力和力矩随迎角变化的曲线。压强分布和总气动系数等的比较说明计算结果与实验值吻合得较好。这也表明了此求解 Euler 方程的方法对于设计工作的可用性。

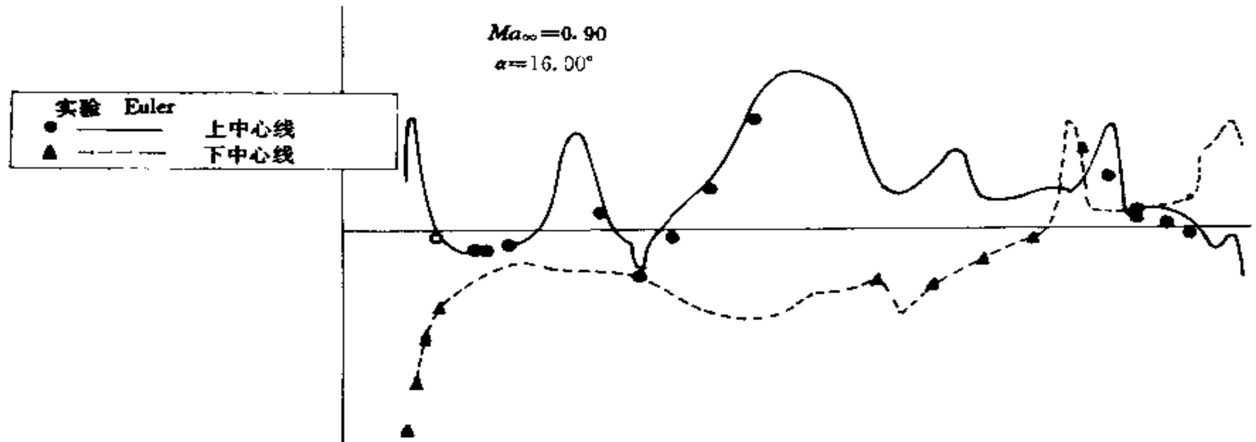


图 3-5 机身轴向的压强分布计算和实验值的比较

二、各向异性的人工粘性

中心差分格式方法中，人工粘性模型对方法的成功应用起着关键性的作用。人工粘性抑制解在激波附近的振荡，又阻尼解在光滑区域内的高阶误差，对解的线性稳定和收敛于定态是很重要的。模型中的一些系数需根据使用经验加以确定。虽然计算实践表明标量人工粘性模式对无粘流场的计算是方便的，也比较可靠，但因其在各方向的尺度因子 λ 是个平均标量值式(3-8)，在计算中往往使人工粘性值较大，会使无粘流场中激波的捕获往往占到 3 个～4 个网格点；在粘性流场，特别在计算壁面附近的边界层时也会带来较大的误差，这种不准确在网格不太精细时尤为突出，因为三维流动的计算量巨大，网格不可能很精细，就更有必要改进人工粘性模型。此外，有些流动区域(如翼型后缘附近)虽为连续流动也必须将人工粘性值限制得很小才能有较好的计算结果，况且标量人工粘性模型对于高超声速流动的计算结果也很不理想。这些问题都不是简单地在标量人工粘性模型中减小常数就能解决的，必须改进模型。

式(3-8)和式(3-9)定义的尺度因子一般称为各向同性的尺度因子，此尺度因子对无粘流场长宽比 $O(1)$的典型网格是可以的，随网格长宽比的增大就会引起太大的人工粘性。一般粘流近壁处网格的长宽比可达 $O(10^3)$，此尺度因子会引起过大的人工粘性而极大地降低摩擦应力的计算准确度。Swanson 和 Turkel[5]、Martinelli 和 Jameson[6]等建议在各方向采用各自通量 Jacobian 矩阵的最大特征值代替原有的线性平均值，即以

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{i-1/2,j} &= \frac{1}{2}[(\lambda_\xi)_{i,j} + (\lambda_\xi)_{i-1,j}]\\ \lambda_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2}[(\lambda_\eta)_{i,j} + (\lambda_\eta)_{i,j+1}]\end{aligned}\right\}\tag{3-20}$$

代替式(3-8)，这就是各向异性的尺度因子。在采用多重网格技术时，式(3-20)在流向的尺度因子会太大，使阻尼高频误差的粘性太小而大大降低收敛速度，故 Martinelli 和 Jameson 又进一步建议取

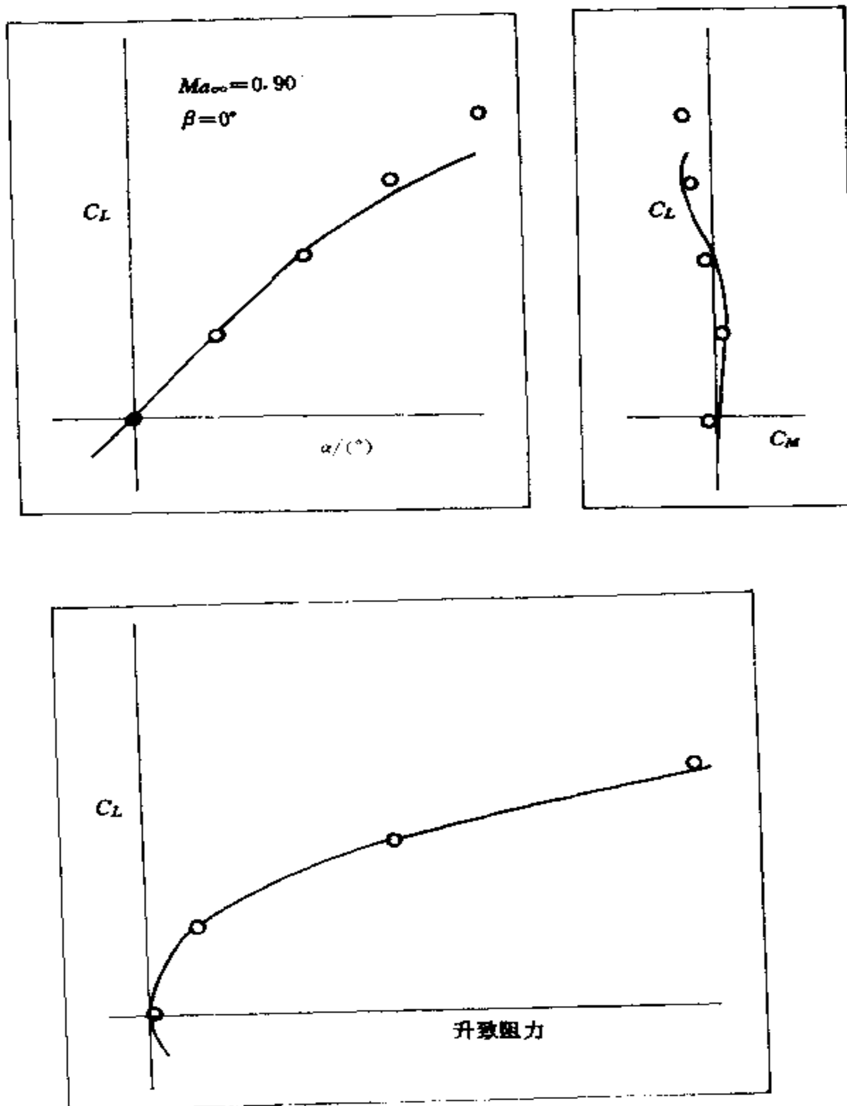


图 3-6　升阻极线、升力和力矩随迎角变化曲线的比较

$$\lambda_{i-1/2,j}=\frac{1}{2}[(\bar{\lambda}_\xi)_{i,j}+(\bar{\lambda}_\xi)_{i-1,j}] \tag{3-21}$$

其中 $(\bar{\lambda}_\xi)_{i,j}=\varphi_{i,j}(\gamma)|\lambda_\xi|_{i,j}$

$\varphi_{i,j}(\gamma)=1+\gamma^{\alpha}_{i,j}$，$0<\alpha<1$，一般取 $\alpha=1/2$

$\gamma=\lambda_\eta/\lambda_\xi$

而在 η 方向，可以定义

$$(\bar{\lambda}_\eta)_{i,j}=\varphi_{i,j}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\cdot|\lambda_\eta|_{i,j} \tag{3-22}$$

Vatsa 等在 Langley 研究中心发展的中心差分方法计算程序 TLNS3D 中采用了上述各向异性的尺度因子代替原各向同性的尺度因子，并用了多重网格技术[7]。他们以 ONERA　M6 机翼为例求解了三维薄层 N-S 方程，计算的 $Ma_\infty=0.84$，$\alpha=3.06°$，以平均气动弦为参考的 $Re_c=$

11.7×10^6，计算时采用了 Baldwin-Lomax 代数湍流模型。图 3-7 给出了采用相同的流向和展向网格数而不同的法向网格数计算出的压强分布及与实验值的比较。由图可见，压强分布在法向网格数由 33 增至 49 时有可见的变化，而由 49 增至 65 时，则几乎没有变化，且计算的压强分布与实验值吻合得很好，因而从压强分布的角度看，法向最小网格数为 49。图 3-8 给出了在两个站位处边界层

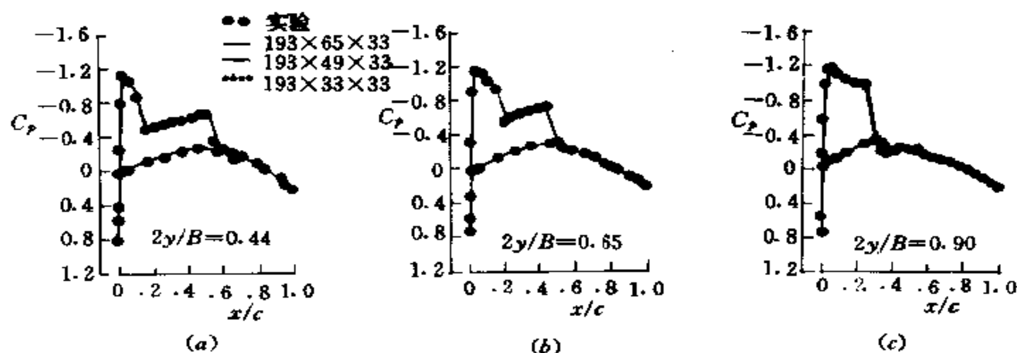


图 3-7 ONERA M6 机翼压强分布的计算和实验值的比较

$Ma_\infty=0.84$，$\alpha=3.06°$，$Re_c=11.7\times10^6$

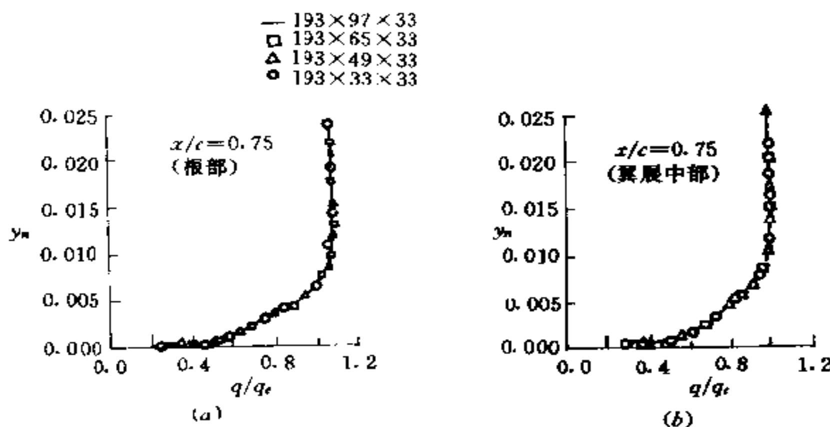


图 3-8 两个站位处计算的速度剖面比较

的速度分布在不同法向网格数下的计算值。由比较可见，此速度分布比压强分布对网格数的变化更为敏感，使速度型保持不变的最小法向网格数为 65。图 3-9 给出了固定法向网格数，取不同流向与展向网格数时计算的压强分布和实验值的比较。由数据分析可知，切向网格数从 193×33 增至 289×49 时所捕捉的激波和前缘的吸力峰都变得更为尖锐，而从 289×49 增至 385×65 时，结果基本不变；可见 289×65×49 的计算网格能提供计算的收敛解(图中无法表示不同网格数计算结果的差别，仅给出了 289×65×49 网格的计算结果)，计算结果也与实验数据吻合得很好。

图 3-10 为气动力系数的误差随网格数变化的曲线。曲线是在 lg 坐标轴上画出的，故曲线的斜率就表示空间差分的精度，现图中曲线斜率为 2，表示本方法有空间二阶精度。该图还表明，为达到同样的准确度，阻力系数 C_D 比升力系数 C_L 要求更精细的网格。

为了检验采用此人工粘性模型和中心差分方法计算高超声速的效果，Vatsa 计算了球头钝锥($Ma_\infty=10$)和简化航天飞机($Ma_\infty=6$)的绕流[8]，并将气动特性的计算结果与实验结果作了比

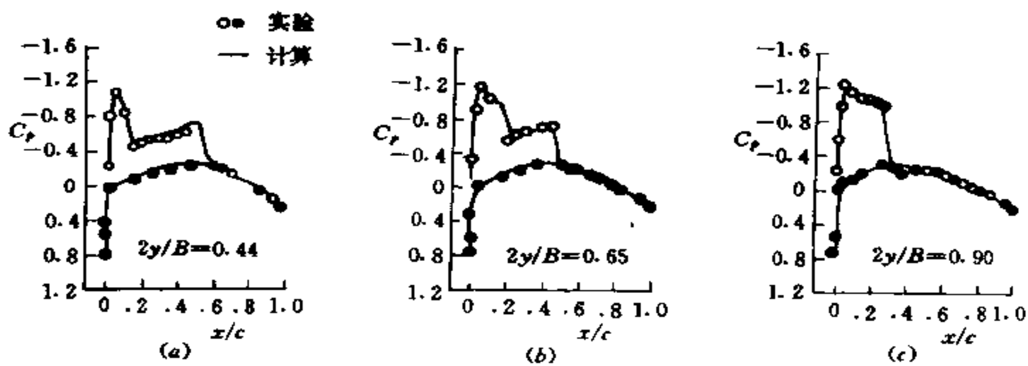


图 3-9　压强分布计算与实验值的比较

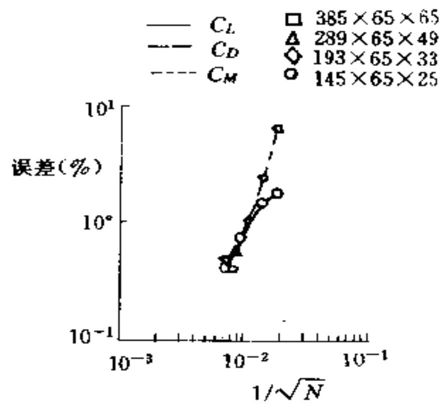


图 3-10　切向网格数对气动力系数的影响

较。计算中所用人工粘性模型基本上与上述跨声速的模型类同，简单地可叙述为(以 i 方向为例)：

$$
\begin{aligned}
\frac{d_{i+1/2,j,k}}{\lambda_{i+1/2,j,k}} = {} & \varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k}(W_{i+1,j,k} - W_{i,j,k}) - \\
& \varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j,k}(W_{i+2,j,k} - 3W_{i+1,j,k} + 3W_{i,j,k} - W_{i-1,j,k})
\end{aligned}
\tag{3-23}
$$

其中 $\lambda_{i+1/2,j,k}$ 仿照式(3-21)为：

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda_{i+1/2,j,k} &= \frac{1}{2}[(\lambda_\xi)_{i,j,k} + (\lambda_\xi)_{i+1,j,k}] \\
\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k} &= K^{(2)}\max(\nu_{i+1},\nu_i) \\
\varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j,k} &= \max\{0,(K^{(4)} - \varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j,k})\}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-24}
$$

ν 的表达式被修改为：

$$
\begin{aligned}
\nu_i &= \frac{|p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}|}{(1-\omega)T_1 + \omega T_2} \\
T_1 &= |p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}| + |p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}| \\
T_2 &= p_{i+1,j,k} + 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

若式(3-25)中取 $\omega=1$，即回到跨声速计算时的公式(3-10)。计算表明，对于超声速和高速声速流计

算应取 $\omega=\frac{1}{2}$。

Vatsa 在简单外形的球头钝锥(钝度＝头部半径/底部半径＝0.183)的计算中讨论了网格的影响。图 3-11 给出了法向网格数分别为 73,97 和 121 时热流的计算数据与实验数据的比较。图中纵坐标为壁面热流 q_w 相对于驻点热流 q_0 的比值,横坐标为流向相对位置。计算的 $Ma_\infty=10.6$,$\alpha=5°$,以头部半径为参考的 $Re_\infty=136,400$。由图可见,法向网格数从 97 增至 121 的计算结果基本相同并与实验数据吻合得很好,表明了中心差分方法对计算高 Ma 流动热流分布的适用性。

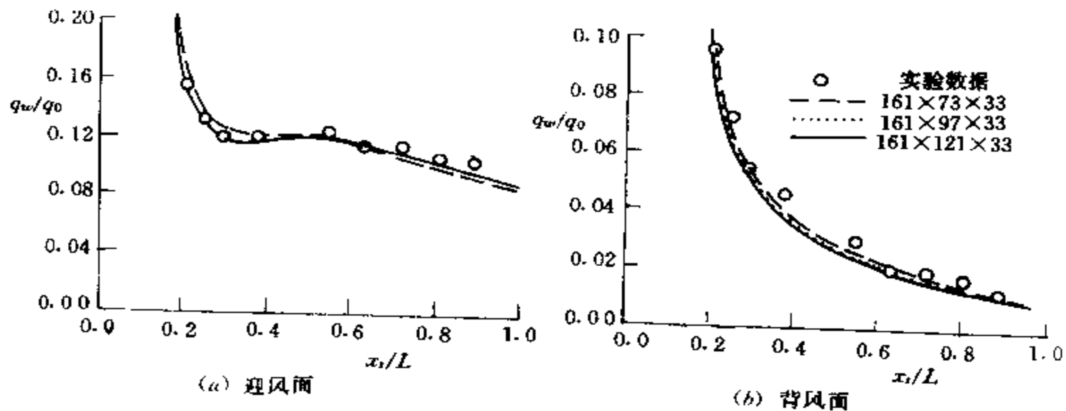


图 3-11 球头钝锥热流计算与实验值的比较 $Ma_\infty=10.6$

图 3-12 给出了简化航天飞机"Halis"的外形在不同流向站位处沿展向(从下翼面绕过翼尖到上翼面)壁面热流分布的计算值与实验数据的比较,图中还给出了用通量差分裂方法的计算软件"LAURA"计算的结果。计算的 $Ma_\infty=5.83$,基于模型长度的 $Re_l=4.5\times10^5$,$\alpha=30°$,计算网格为 289×69×41。图 3-13 给出了 $\alpha=40°$,计算网格为 289×81×41 的结果比较。由比较可见,除在翼尖附近"LAURA"的计算结果有很大间断这一非物理性结果外(可能是由通量限制器(Limiter)引起的),两种计算方法所得计算结果很一致,并与摒除掉个别分散值的实验数据吻合得很好。图 3-14 给出了两种迎角下对称平面内等马赫线的分布,表明了迎角变化对整个流场和头激波位置的影响。

三、矩阵人工粘性模型

Swanson 和 Turkel 为了在中心型差分方法中减小人工粘性,提出了矩阵人粘性模型[9,10]。

分析迎风型方法可知,求解守恒律双曲系统的迎风格式是基于特征值来确定信息传播方向,并进而确定空间导数一侧差分方向的。采用这种差分格式可自动捕获激波而不会产生振荡。因此可以认为中心差分方法一种成功的人工粘性模型是在激波附近模仿迎风差分方法的做法。

一维常系数线性标量方程 $u_t+cu_x=0$ 的一阶迎风格式为:

$$u_i^{n+1}=u_i^n-c\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{cases}u_{i+1}-u_i & c<0\\ u_i-u_{i-1} & c>0\end{cases}\tag{3-26}$$

可将其改写为:

$$u_i^{n+1}=u_i^n-c\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}-u_{i-1})+|c|\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})\tag{3-27}$$

上式右端实际上包含了中心差分格式项和二阶人工粘性项。将其推广到非线性守恒系方程

$$\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{f}_x=0\tag{3-28}$$

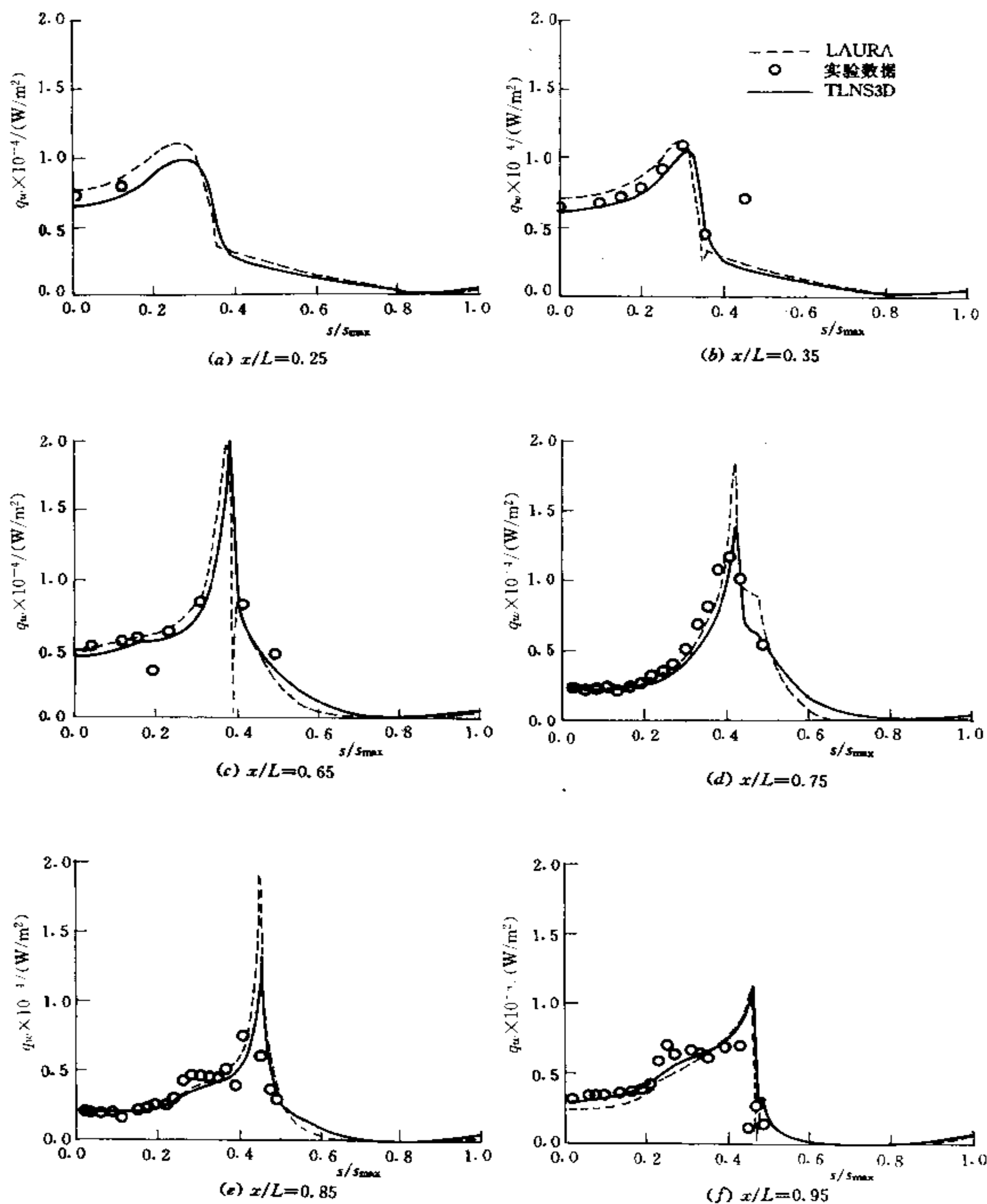


图 3-12　简化航天飞机壁面热流计算与实验值的比较

$Ma_\infty=5.83, \alpha=30°\quad Re_l=4.5\times10^5$

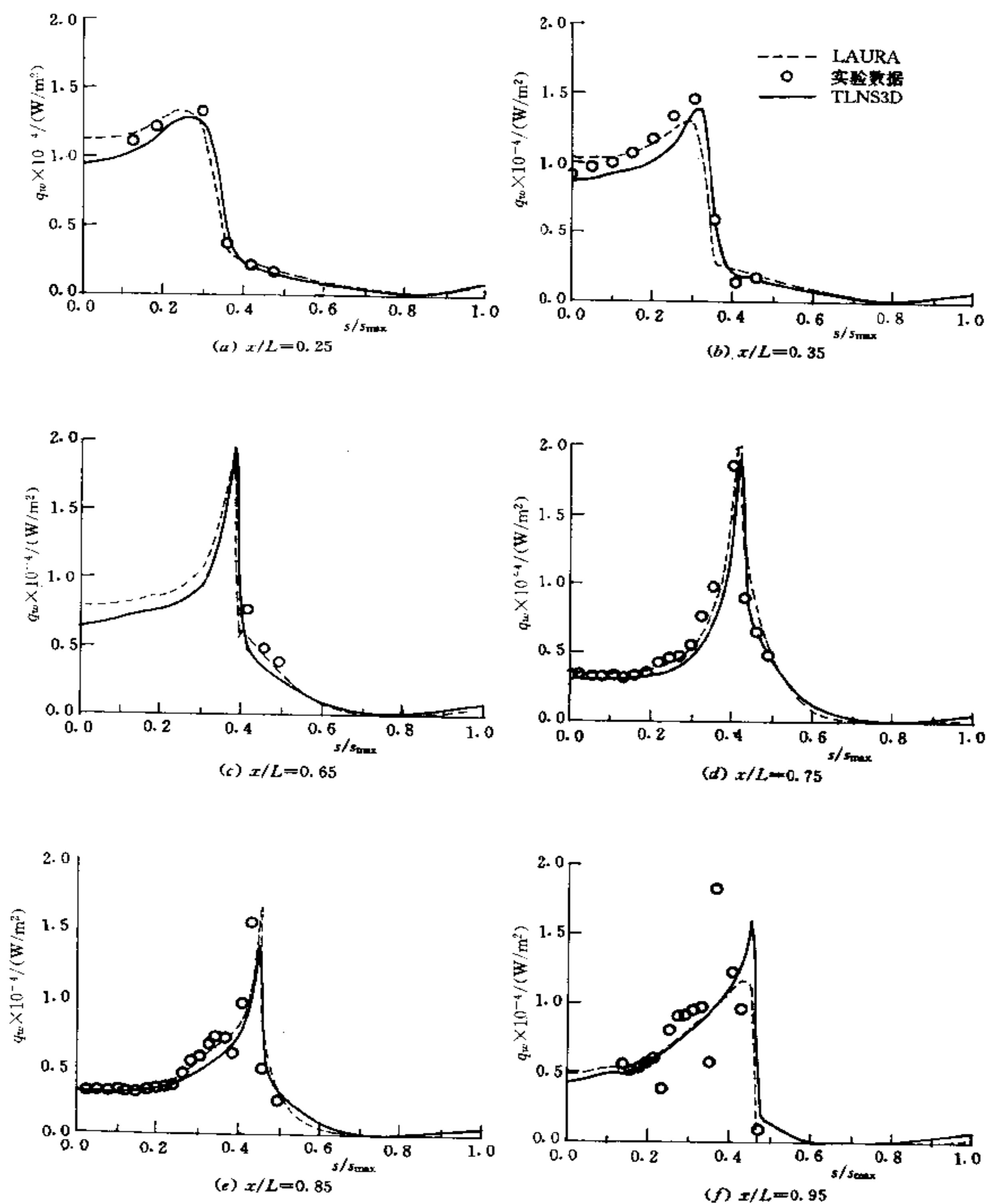


图 3-13　简化航天飞机壁面热流计算与实验值的比较

$Ma_\infty=5.83, \alpha=40° \quad Re_l=4.5\times10^5$

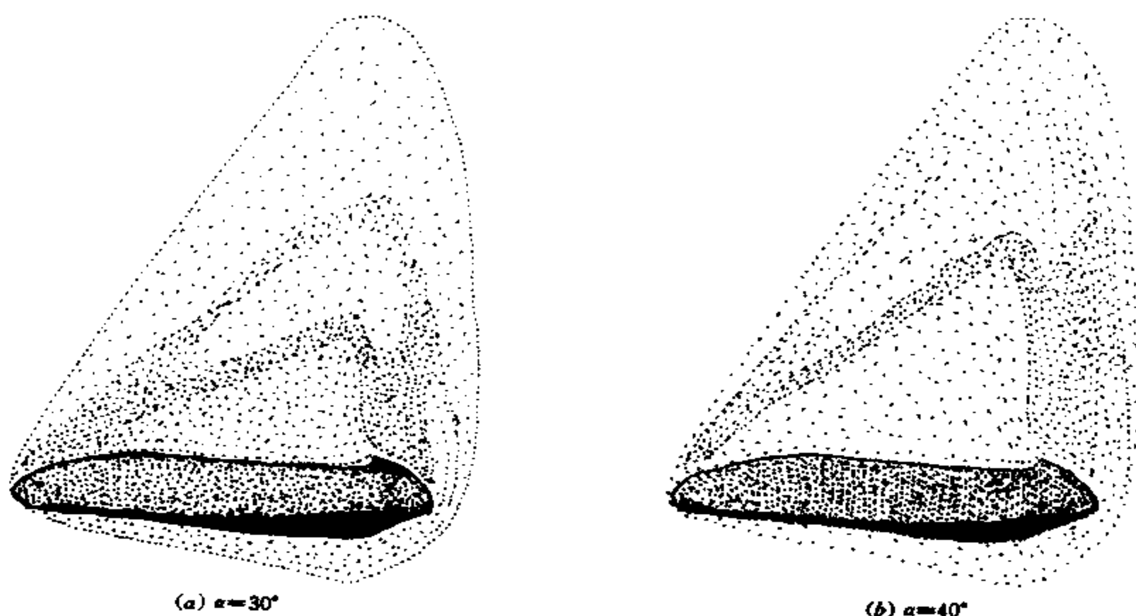


图 3-14　简化航天飞机对称平面内等 Ma 线分布 $Ma_\infty=5.83$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是有 N 个分量的守恒变量，$\boldsymbol{f}$ 是有 N 个分量的通量向量，上式变为：

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1}=\boldsymbol{u}_i^n-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{f}_{i+1}-\boldsymbol{f}_{i-1})+\frac{\Delta t}{2\Delta x}[|\boldsymbol{A}_{i+1/2}|(\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i)-|\boldsymbol{A}_{i-1/2}|(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_{i-1})]$$

$$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{T}|\boldsymbol{\Lambda}|\boldsymbol{T}^{-1},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_N] \tag{3-29}$$

其中　$\boldsymbol{T}$-Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$的右特征向量，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值对角阵。

矩阵$|\boldsymbol{A}_{i-1/2}|$可按算术平均或 Roe 平均计算。

在计算二维流体动力学方程组时，对比式(3-29)与式(3-5)～式(3-8)可见，为使中心差分方法在激波附近模仿迎风型方法，应以$|\boldsymbol{A}|$替代式(3-8)中的尺度因子 λ，以改进式(3-6)定义的 ξ 方向的人工粘性项。在 η 方向则以 η 和$|\boldsymbol{B}|$分别代替上述讨论中的 ξ 和$|\boldsymbol{A}|$即可。

因 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_3]$，　$\lambda_1=q+c\sqrt{a_1^2+a_2^2}$，　$\lambda_2=q-c\sqrt{a_1^2+a_2^2}$，　$\lambda_3=q$，　$a_1=J^{-1}\xi_x$，$a_2=J^{-1}\xi_y$，　$q=a_1u+a_2v$

故

$$|\boldsymbol{A}|=|\lambda_3|I+\left(\frac{|\lambda_1|-|\lambda_2|}{2}-|\lambda_3|\right)\left[\frac{v-1}{c^2}|\boldsymbol{E}_1|+\frac{1}{a_1^2+a_2^2}|\boldsymbol{E}_2|\right]$$
$$+\frac{|\lambda_1|-|\lambda_2|}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}c}\right)[|\boldsymbol{E}_3|+(v-1)|\boldsymbol{E}_4|] \tag{3-30a}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\varphi & -u & -v & 1\\ u\varphi & -u^2 & -uv & u\\ v\varphi & -uv & -v^2 & v\\ h\varphi & -uh & -vh & h\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -a_1q & a_1^2 & a_1a_2 & 0\\ -a_2q & a_2a_1 & a_2^2 & 0\\ -q^2 & qa_1 & qa_2 & 0\end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{E}_3 = \begin{bmatrix} -q & a_1 & a_2 & 0 \\ -uq & ua_1 & ua_2 & 0 \\ -vq & va_1 & va_2 & 0 \\ hq & ha_1 & ha_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\varphi & -a_1u & -a_1v & a_1 \\ a_2\varphi & -a_2u & -a_2v & a_2 \\ q\varphi & -qu & -qv & q \end{bmatrix}
$$

$$
\varphi = (u^2 + v^2)/2
$$

由式(3-30a)可以看出，$|\boldsymbol{A}|$的计算是由标量乘以 $\boldsymbol{E}_i(i=1,2,3,4)$的第一行或第二行(当第一行元素皆为零时)得到的，因而，对于任意的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 值，都不必先计算出$|\boldsymbol{A}_{i+1/2}|$，再将其乘以向量$(\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i)$，而可直接计算$|\boldsymbol{A}_{i+\frac{1}{2}}|(\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i)$。$\eta$ 方向上$|\boldsymbol{B}|$的计算与 ξ 方向上$|\boldsymbol{A}|$的计算相似。

由于在驻点附近 λ_3 趋于零，在声速点附近 λ_1 或 λ_2 趋于零，都将使人工粘性趋于零而引起解的非线性不稳定，造成数值计算的困难。为克服此困难，可以$\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2$ 和$\tilde{\lambda}_3$ 分别代替 λ_1,λ_2 和 λ_3，即取

$$
\left.\begin{aligned} |\tilde{\lambda}_1| &= \max(|\lambda_1|, V_n\rho(A)), & |\tilde{\lambda}_3| &= \max(|\lambda_3|, V_l\rho(A)) \\ |\tilde{\lambda}_2| &= \max(|\lambda_2|, V_n\rho(A)), & \rho(A) &= |q| + c\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{3-30b}
$$

其中参数 V_n 和 V_l 应根据解所捕捉到的无振荡激波的分辨率并综合比较数值格式的收敛率由数值实验确定。跨声速数值计算表明 V_n 和 V_l 应在 0.2 到 0.3 之间，一般可取 0.25。

Swanson 和 Turkel 证明了在上述矩阵人工粘性模型中若以压强作自变量，以

$$
\psi_i = \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{|p_{i+1} - p_i| + |p_i - p_{i-1}| + \varepsilon}, \qquad \psi_{i+1/2} = \max(\psi_i, i_{i+1}) \tag{3-31a}
$$

作为标量限制器(limiter)，就可保证在激波附近的 TVD 特性。上式中的 ε 是一个使分母不为零的小数，其大小的确定一般比较困难，因此他们建议用

$$
\psi_i = \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{(1-\omega)(|p_{i+1} - p_i| + |p_i - p_{i-1}|) + \omega(p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1})} \tag{3-31b}
$$

作标量限制器，其中 $0<\omega\leqslant 1$。当 $\omega\ll 1$ 时，式(3-31b)就变成了式(3-31a)。以 $\psi_{i+1/2,j}$代替式(3-7)中的 $\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)}$就形成了改进的矩阵人工粘性模型。$\psi_i$ 的定义式与式(3-10)很相似，仅分母有点差别。然而就是这点差别，在 ω 足够小和二阶粘性项前保持 1/2 的系数时，就使中心差分格式在激波附近变成了一阶迎风型格式。式(3-31b)中 ω 值取得较大就不易在高 Ma 时抑制振荡；ω 值取得太小，又会使多重网格下的解不易收敛，一般可取 $\omega=1/2$。

由于 TVD 特性主要与二阶粘性有密切关系，而与四阶粘性项关系不大，故四阶粘性仍可使用原公式，但应以 $\psi_{i+1/2,j}$代替式(3-10)$\varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)}$公式中的 $\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)}$。

Swanson 和 Turkel 采用上述矩阵人工粘性模型求解了 N-S 方程，模型中所用的特征值采用类似式(3-21)的算法，即

$$
(\bar{\lambda}_m)_{i,j,k} = (\lambda_m)_{i,j,k}\varphi^{(l)}, \quad l = \xi,\eta,\zeta
$$

$$
\varphi^{(l)} = \left[\frac{\lambda(\xi)}{\lambda(l)}\right]^\beta + \left[\frac{\lambda(\eta)}{\lambda(l)}\right]^\beta + \left[\frac{\lambda(\zeta)}{\lambda(l)}\right]^\beta,
$$

$$
\beta = \frac{1}{2}
$$

图 3-15 和图 3-16 分别给出了采用标量人工粘性模型和矩阵人工粘性模型的平板

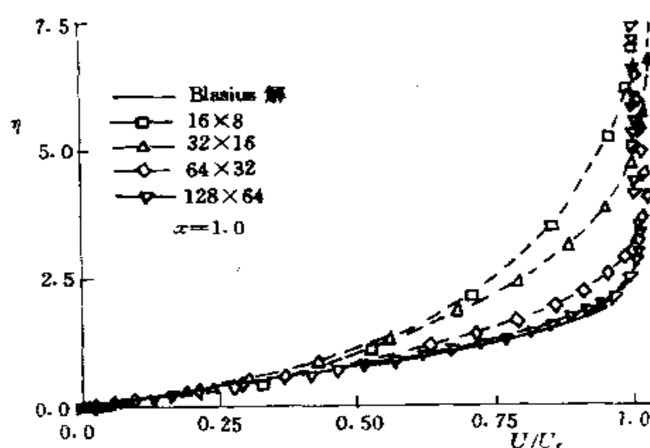


图 3-15　标量人工粘性模型计算的平板边界层速度型平板边界层速度型

层流边界层速度型的计算结果与 Blasius 解的比较。计算的 $Ma_\infty=0.3$，$Re_\infty=5\times10^5$。由图 3-15 可见，不仅粗网格时计算的速度型与精确解差别很大，即使在很细网格（128×64）的情况下，计算速度型的外缘也存在着过冲现象。而由图 3-16 可见，改用矩阵人工粘性模型后计算的速度型就与精确解吻合得非常好。对比表明，人工粘性模型对粘性解的影响是很大的。图 3-17 给出了采用矩阵人工粘性模型（64×32）的网格时，不同站位处相似速度型的计算值。可见，他们彼此吻合一致。图 3-18 给出了平板的摩擦应力系数随 Re 变化的曲线。计算值也与精确解吻合得很好。表 3-1 给出用矩阵人工粘性模型的中心型差分方法和用 Roe 的迎风型差分方法计算平板层流边界层参数时各自相对于 Blasius 精确解的误差。

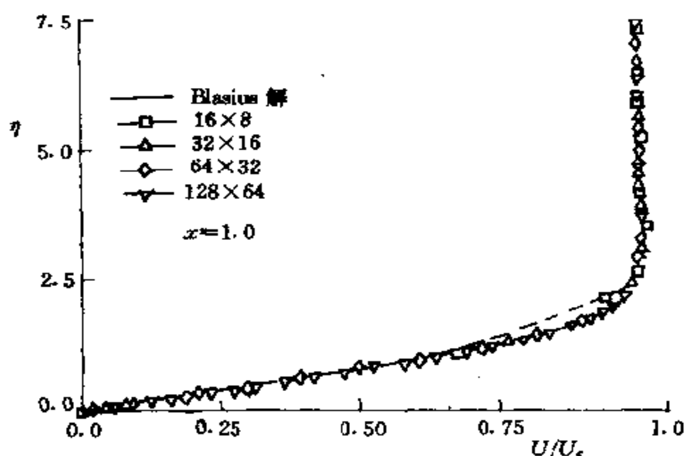


图 3-16　矩形人工粘性模型计算的平板边界层速度型

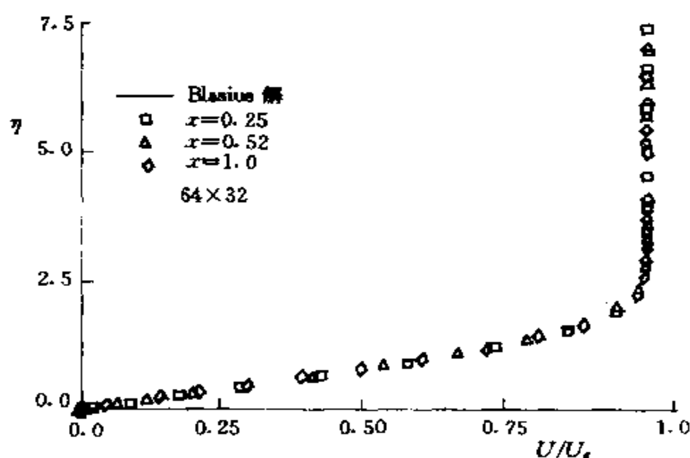


图 3-17　不同站位处计算的相似速度型比较

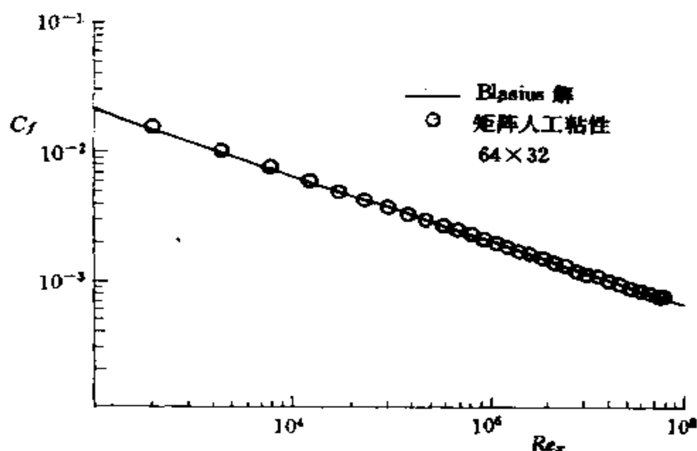


图 3-18　矩阵人工粘性模型计算的平板摩阻系数

表 3-1　$x=1$ 处边界层参数的计算误差

网格 \ 方法 \ 参数	$C_f(\%)$		$\delta^*(\%)$		$\theta(\%)$		$C_f R_{e_\theta}(\%)$	
	CD	Roe	CD	Roe	CD	Roe	CD	Roe
16×8	9.73	7.10	7.71	0.05	4.68	16.7	14.9	25.0
32×16	2.17	4.04	2.42	3.08	1.68	5.90	3.88	1.62
64×32	0.30	2.12	1.41	1.28	0.98	1.78	1.29	0.38
128×64	0.07	0.77	1.13	0.66	0.95	0.86	1.02	0.087

由表可见，采用矩阵人工粘性模型的中心型差分方法解边界层时的精度与迎风型方法的精度相当，都比较高，较之标量人工粘性的中心型差分方法在粗网格时由于人工粘性而造成粘性解的高度失真有了很大的改进。

图 3-19 给出了分别用矩阵人工粘性的中心差分方法和用迎风型 Roe 格式方法对绕压缩拐角的高超声速流动计算 C_p 和 C_f 的结果。计算中压缩角为 20°，$Ma_\infty=10$，壁温与自由来流温度比为 5.576，以压缩角前平板 L 为参考的 $Re_L=1.8*10^4$，计算网格为 80×80。由图可见，两种方法的计算结果完全一致。

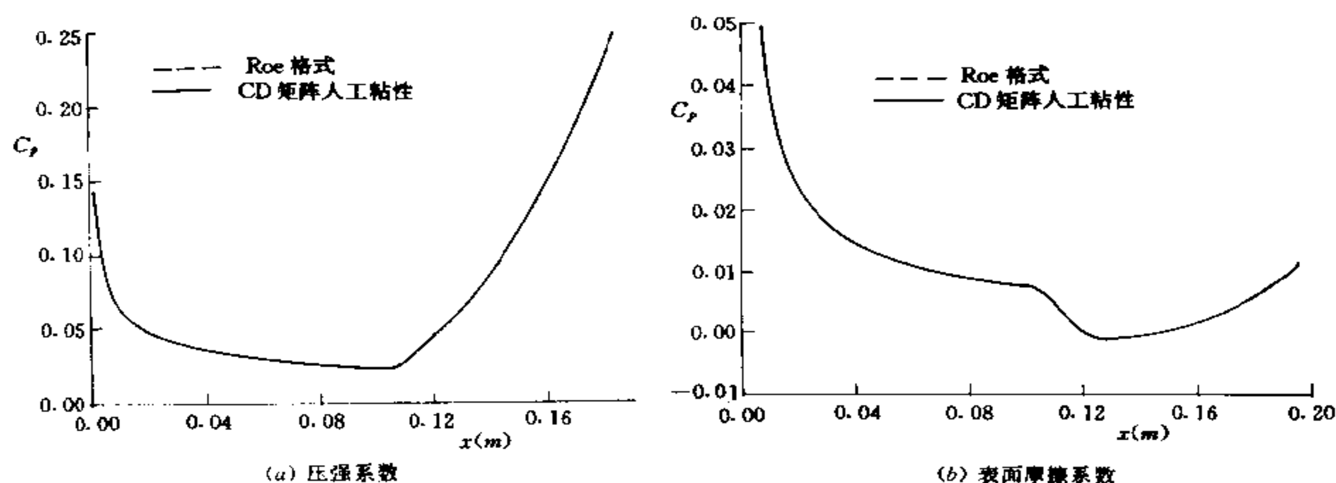


图 3-19　绕压缩拐角高超声速流动计算的 C_p 和 C_f 比较

最后应该指出，矩阵人工粘性模型代替标量人工粘性模型将增加计算量，对于三维问题，CPU 时间会增加 20%左右。但迎风型 Roe 格式方法的计算工作量是标量人工粘性模型中心型差分方法的 2 倍～3 倍，因此仍可说矩阵人工粘性模型保持了计算简单的优点。

第二节　迎风型通量分裂方法

一、矢通量向量分裂法

（一）完全气体的可压 N-S 方程

完全气体的一维可压 N-S 方程无量纲化后可写成如下向量形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \boldsymbol{H} \tag{3-32}$$

其中

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e + p) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \frac{4}{3}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x}(u,\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{C_p}{PrRe}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial T}{\partial x}) \end{bmatrix}$$

$$p = \frac{1}{\gamma Ma_\infty}\rho T, \qquad e = \rho(C_v T + \frac{u^2}{2})$$

$$C_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)Ma_\infty}, \qquad C_p = \gamma C_v \tag{3-33}$$

方程中的 ρ,u,T 和 p 分别为对来流参数 ρ_∞,u_∞,T_∞和 ρ_∞,u_∞^2无量纲化后所得的密度、速度、温度和压力;式中 Ma_∞为来流马赫数,Re 为雷诺数,Pr 为普朗特数,γ 为比热比,μ 为粘性系数。通常在计算中采用萨泽兰特(Sutherland)公式

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{T^{3/2}(1 + T_s/T_\infty)}{T + T_s/T_\infty} \tag{3-34}$$

式中 T_s 为参考温度。

在方程(3-32)中忽略粘性项,即可得无粘 Euler 方程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0 \tag{3-35}$$

亦可表达为

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x} = 0 \tag{3-36}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为雅可比(Jacob)系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{\gamma-2}{2}u^3 - \frac{uc^2}{\gamma-1} & \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{3-\gamma}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \tag{3-37}$$

其中 c 为无量纲化的声速。

雅可比系数矩阵经相似变换后可用对角矩阵表示

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S} \tag{3-38}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值构成的对角矩阵,即

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = u, \qquad \lambda_2 = u - c, \qquad \lambda_3 = u + c \tag{3-39}$$

相似变换矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之左特征行向量组成的矩阵,即

$$
S=\begin{bmatrix} \frac{u^2}{2}-\frac{c^2}{\gamma-1} & -u & 1 \\ -u-\frac{\gamma-1}{c}\frac{u^2}{2} & 1+\frac{\gamma-1}{c}u & -\frac{\gamma-1}{c} \\ -u+\frac{\gamma-1}{c}\frac{u^2}{2} & 1-\frac{\gamma-1}{c}u & \frac{\gamma-1}{c} \end{bmatrix} \tag{3-40}
$$

$$
S^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c^2} & -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \\ -\frac{\gamma-1}{c^2}u & -\frac{u-c}{2c} & \frac{u+c}{2c} \\ -\frac{\gamma-1}{c^2}\frac{u^2}{2} & -\frac{1}{2c}\left[\frac{u^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}-uc\right] & \frac{1}{2c}\left[\frac{u^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}+uc\right] \end{bmatrix}
$$

不难验证,矩阵 S^{-1}的每一列为矩阵 A 的右特征向量。

若状态方程形式为

$$
p=\rho g(e) \tag{3-41}
$$

则通量 F 为 W 的一次齐次函数,即

$$
F(bW)=bF(W)
$$

此式对任意参数 b 都成立。若其两侧均对参数 b 取导数,再令 $b=1$,则可得

$$
F=AW,\qquad A=\frac{\partial F}{\partial W} \tag{3-42}
$$

这也可从 F,A,W 的公式(3-33)和(3-37)直接计算加以验证。

由于从式(3-36)和(3-37)得$\frac{\partial F}{\partial x}=A\frac{\partial W}{\partial x}$,从式(3-42)得$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(AW)$,故$\frac{\partial}{\partial x}(AW)=A\frac{\partial W}{\partial x}$。类似地,$\frac{\partial F}{\partial t}=A\frac{\partial W}{\partial t}$,$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(AW)$,故$\frac{\partial}{\partial t}(AW)=A\frac{\partial W}{\partial t}$。因此,从形式上看雅可比系数矩阵 A 如同常数,可提到微分号外面来。对单个标量方程,只有当系数是常数时才能将系数提到微分号外。

(二)雅可比系数矩阵的分裂

雅可比系数矩阵分裂是指将雅可比矩阵分裂为两个或数个矩阵和的形式。即 $A=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots\cdots$。 (3-43)

若矩阵 $A^{(i)}$可以直接线性地以矩阵 A 表示,即

$$
A^{(i)}=\sigma_i A \tag{3-44}
$$

则称为线性分裂,其中 σ_i 为标量参数。如矩阵 $A^{(i)}$不能通过原矩阵 A 线性表示,则称为非线性分裂或结构分裂。

计算实践表明,利用矩阵 A 的特征值 λ_k 来分裂矩阵是很有意义的。通常是首先将矩阵之特征值 λ_k 分裂成两项和的形式,即

$$
\lambda_k=\lambda_k^+ +\lambda_k^-,\qquad \text{而 } \lambda_k^{\pm}=\frac{\lambda_k\pm|\lambda_k|}{2},\qquad \lambda_k^+\geqslant 0,\qquad \lambda_k^-\leqslant 0 \tag{3-45}
$$

这种分裂方法实际上是按照物理上信息传播的方向进行分裂,便于按传播方向取相应的差分格式。利用分裂后的量 $\lambda_k^{\pm}$ 可构造相应的对角矩阵

$$
\Lambda^{\pm}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{\pm} \end{bmatrix} \tag{3-46}
$$

及相应的矩阵 $\boldsymbol{A}^{\pm}$ 和分裂后的通量向 $\boldsymbol{F}^{\pm}$

$$\boldsymbol{A}^{\pm} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{\pm}\boldsymbol{S} \tag{3-47}$$

$$\boldsymbol{F}^{\pm} = \boldsymbol{A}^{\pm}\boldsymbol{W} \tag{3-48}$$

根据 $\lambda_i^{\pm}$ 的定义，有如下关系：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{A}^{-} \tag{3-49}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{+} + \boldsymbol{F}^{-} \tag{3-50}$$

（三）Steger-Warming 矢通量分裂法[11]

Steger-Warming 根据上述分裂方法于 1981 年提出了一种矢通量分裂方法，以解二维 Euler 方程为例现简述如下：

在笛卡尔坐标系中二维守恒型 Euler 方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = 0 \tag{3-51}$$

其中

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uu + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho vv + p \\ v(e+p) \end{bmatrix} \tag{3-52}$$

状态方程为

$$p = (\gamma - 1)\left[e - \frac{\rho(u^2+v^2)}{2}\right] \tag{3-53}$$

Steger 和 Warming 将矢通量(如以 $\boldsymbol{F}$ 为例)以其特征值(λ_i)表示：

$$\boldsymbol{F} = \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ 2(\gamma-1)\lambda_1 u + \lambda_3(u+c) + \lambda_4(u-c) \\ 2(\gamma-1)\lambda_1 v + \lambda_3 v + \lambda_4 v \\ (\gamma-1)\lambda_1(u^2+v^2) + Q + \lambda_3/2[(u+c)^2+v^2] + \lambda_4/2[(u-c)^2+v^2] \end{bmatrix} \tag{3-54}$$

其中 c 为声速，$Q=\dfrac{(3-\gamma)(\lambda_3+\lambda_4)c^2}{2(\gamma-1)}$，$\lambda_1=u$，$\lambda_3=u+c$，$\lambda_4=u-c$。因此，矢通量 $\boldsymbol{F}^{+}$ 和矢通量 $\boldsymbol{F}^{-}$ 可以由 $\lambda_i=\lambda_i^{+}$ 和 λ_i^{-} 分别代入上式获得。必须注意，对于超声速和声速流，即 $|Ma_x|=|u/c|\geqslant 1$ 时

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}^{+} = \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^{-} = 0 & \text{当 } Ma_x \geqslant 1 \text{ 时} \\ \boldsymbol{F}^{-} = \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^{+} = 0 & \text{当 } Ma_x \leqslant -1 \text{ 时} \end{cases} \tag{3-55}$$

对矢通量 $\boldsymbol{G}$，可根据其 Jacobian 系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 v，$v+c$ 和 $v-c$ 作类似的分裂。对分裂的矢通量分量 $\boldsymbol{F}^{+}$ 和 $\boldsymbol{F}^{-}$ 可分别采用后向和前向的空间差分离散计算。若分别以 δ_x^{-} 和 δ_x^{+} 表示后向与前向差分，则在均匀空间网格中可得一阶和二阶的后向差分。

$$\delta_x^{-}\boldsymbol{F}_i^{+} = \frac{1}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_i^{+} - \boldsymbol{F}_{i-1}^{+}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{+}}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x)$$

$$\delta_x^{-}\boldsymbol{F}_i^{+} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{F}_i^{+} - 2\boldsymbol{F}_{i-1}^{+} + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{i-2}^{+}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{+}}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^2) \tag{3-56}$$

或可写为：

$$\delta_x^{-}\boldsymbol{F}_i^{+} = \frac{1}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_i^{+} - \boldsymbol{F}_{i-1}^{+}) + \frac{\varphi_i^{-}}{2\Delta x}(\boldsymbol{F}_i^{+} - \boldsymbol{F}_{i-1}^{+}) - \frac{\varphi_{i-1}^{-}}{2\Delta x}(\boldsymbol{F}_{i-1}^{+} - \boldsymbol{F}_{i-2}^{+}) \tag{3-57}$$

即由一阶项及二阶项组合而成，其精度由开关函数 φ^{-} 控制，若 $\varphi^{-}=1$，为二阶精度，$\varphi^{-}=0$，则为一

阶精度。开关函数 φ^- 可用来限制二阶项的作用，故又可称为限制器(limiter)。φ^- 的空间变化可保证二阶与一阶精度之间的守恒变化，这对在间断解存在的区域中消除振荡是十分必要的。

类似地可得前差的相应表达式。

公式(3-57)也可写成如下形式：

$$\delta_{\mp} F_i^- = (F_{i+1/2}^+ - F_{i-1/2}^-)/\Delta x \tag{3-58}$$

而

$$F_{i+1/2}^+ = F_i^+ + \varphi_i^- (F_i^+ - F_{i-1}^+)/2$$

换言之，即在所有网格节点处进行矢通量分裂，获得 F^-，然后再前向差分外插得到网格单元边界面处的通量值。这种离散方法是 Steger 和 Warming 方法中的原始处理方法。

经过矢通量分裂后的 Euler 方程变为

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F^+}{\partial x} + \frac{\partial F^-}{\partial x} + \frac{\partial G^-}{\partial y} + \frac{\partial G^-}{\partial y} = 0$$

可用隐式或显式求解。Steger 和 Warming 采用近似因子分解的隐式方法求解上述方程，即若写成增量形式可得

$$\left[I + \Delta t\left(\delta_x^- \frac{\partial F^-}{\partial W} + \delta_x^- \frac{\partial F^-}{\partial W}\right]^n * \left[I + \Delta t\left(\delta_y^- \frac{\partial G^-}{\partial W} + \delta_y^+ \frac{\partial G^-}{\partial W}\right)\right]^n \Delta W_{i,j}$$
$$= -\Delta t\left[\delta_x^- F^- \delta_x^- F^- + \delta_y^- G^+ + \delta_y^- G^-\right]_{i,j}^n \tag{3-59}$$

其中 $\Delta W = W^{n+1} - W^n$。

对方程左端项用迎风一阶差分可得块三对角结构的隐式方程组，可用 Thomas 方法解之。由于对 F,G 的 Jacobian 系数矩阵作了线化，就对隐式方法提出了对时间 Δt 的稳定性要求这一限制。同时由于采用迎风空间差分，无需再加显式人工粘性项。

(四) Van Leer 分裂格式[12]

Steger 和 Warming 的矢通量分裂是以矢通量的特征值 $\lambda_i^{\pm}$ 分裂为基础的，其缺点是在特征值为零处通量分裂不连续可微，即 $\frac{dF^-}{dMa}$ 不连续。图 3-20(a)给出用 ρc 进行无因次化的质量通量 f_1 随 Ma 数的变化曲线，可见质量通量通过特征值为零处(如声速点和驻点)，其梯度出现了不连续。这种不可微性会造成解在声速附近的小振荡。为减小这种振荡，Steger 等进一步在特征值转换技术中引入了一个小参数而定义分裂的特征值为：

$$\lambda_i^{\pm} = \frac{\lambda_i \pm (\lambda_i^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}{2} \tag{3-60}$$

使特征值函数在 $\lambda_i = 0$ 处由一个顶点与中心距离为 $\varepsilon/2$ 的双曲线来代表，遂使解在通过声速点处有一个光滑的过渡。

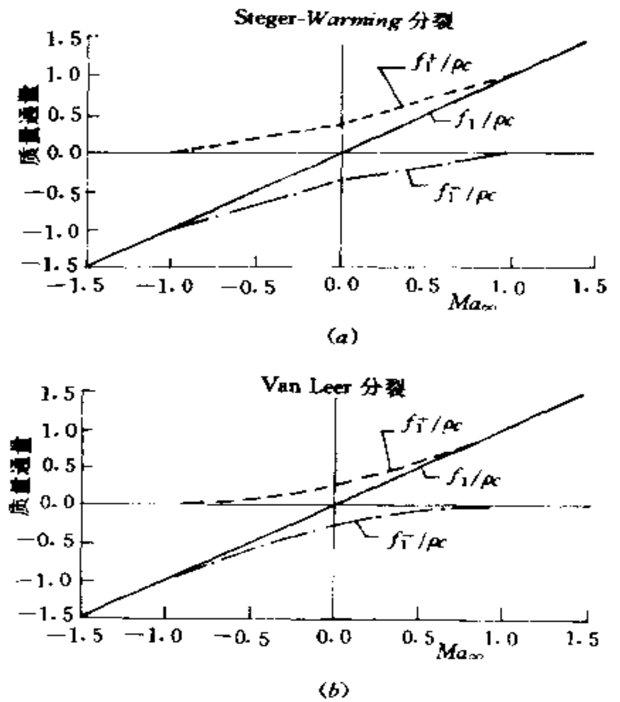


图 3-20 两种分裂方法的质量通量随 Ma 的变化

为了改进使矢通量分裂具有可微性，Van Leer 提出了一种分裂方法，将通量 F 表示为局部一

维马赫数($Ma_x=\frac{u}{c}$)的函数进行分裂，再用 Ma 的二次多项式光滑之，以满足 $\mathrm{d}F^{\pm}/\mathrm{d}Ma$ 的连续要求。分裂形式为：

$$
\begin{aligned}
&\text{当 } Ma_x \geqslant 1 \text{ 时、} \quad \boldsymbol{F}^+=\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F}^-=0 \\
&\text{当 } Ma_x \leqslant -1 \text{ 时，} \quad \boldsymbol{F}^+=0, \quad \boldsymbol{F}^-=\boldsymbol{F}
\end{aligned} \tag{3-61}
$$

亚声速时，即 $|Ma_x|<1$ 时

$$
\boldsymbol{F}^{\pm}=\begin{bmatrix}
f_1^{\pm} \\
f_1^{\pm}[(\gamma-1)u \pm 2c]/\gamma \\
f_1^{\pm}v \\
f_1^{\pm}[\{(\gamma-1)u \pm 2c\}^2/\{2(\gamma^2-1)\}+v^2/2]
\end{bmatrix} \tag{3-62}
$$

其中 $f_1^{\pm}=\pm\rho c[\frac{1}{2}(Ma_x\pm 1)]^2$

图 3-20(b)给出了 Van Leer 分裂格式的无因次质量通量随 Ma 的变化情况，可见在声速点和驻点处分裂通量具有连续可微的性质。

对于 $\boldsymbol{G}$ 通量，也可以局部一维 $Ma_y=\frac{v}{c}$ 作为自变量作类似的分裂。

（五）MUSCL 方法

为使解具有保单调特性和高阶精度，Van Leer[13]提出了 MUSCL(Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)方法。将其用于矢通量分裂格式中即首先将网格节点上的 $\boldsymbol{W}$ 值外插至网格单元边界面处，然后再在边界面处分裂矢通量，这样可导致下述$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}$：

$$
\delta_x \boldsymbol{F}_i=\frac{1}{\Delta x}[\boldsymbol{F}^+(\boldsymbol{W}_{i+1/2}^-)-\boldsymbol{F}^+(\boldsymbol{W}_{i-1/2}^-)+\boldsymbol{F}^-(\boldsymbol{W}_{i+1/2}^+)-\boldsymbol{F}^-(\boldsymbol{W}_{i-1/2}^+)] \tag{3-64}
$$

其中 $\boldsymbol{F}^{\mp}(\boldsymbol{W}^{\pm})$表示 $\boldsymbol{W}^{\pm}$处计算的通量值 $\boldsymbol{F}$

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_{i+1/2}^- &= \boldsymbol{W}_i+\varphi_i^-(\boldsymbol{W}_i-\boldsymbol{W}_{i-1})/2 \\
\boldsymbol{W}_{i+1/2}^+ &= \boldsymbol{W}_{i-1}-\varphi_{i+1}^+(\boldsymbol{W}_{i+2}-\boldsymbol{W}_{i+1})/2
\end{aligned}\right\} \tag{3-65}
$$

显然，$\varphi^{\pm}=0$ 为一阶精度。$\varphi^{\pm}=1$ 为二阶精度。与方程(3-57)一样应用 $\varphi^{\pm}$的空间变化来限制二阶项的作用。

这种 MUSCL 格式的分裂离散式(3-65)比原始分裂离散式(3-57)有更多的优点。第一，矢通量是按照有限体积边界面处的当地 Ma 进行分裂的，不象原始分裂方法那样按体积的中心处分裂再插值至边界面处，因而更易于保证单调性；第二，在通过声速点或驻点处时，一般通量 $\boldsymbol{F}$ 比守恒变量 $\boldsymbol{W}$ 更不可微，这在 Steger-Warming 分裂格式中更为明显(通量是不可微的)；第三，MUSCL 更容易向多维推广。

应该指出，对于 MUSCL 型式的迎风格式，其守恒变量值必须由网格点处外插至网格边界面处，不同的插值方式形成不同的空间差分并产生不同的耗散和色散特性。若空间差分不具有单调性，则网格边界面处插得的值将会使解在间断面处形成振荡，因此插值所用的函数是很有影响的。

Anderson 等的数值计算结果[14]表明，应用带有限制器的 MUSCL 方法于 Setger 和 Warming 方法中去甚至可使解在过声速处不发生振荡。以一维的拉瓦尔喷管的跨声速流动为例，图 3-21 为采用二阶矢通量分裂方法(方程(3-57))的计算结果。图 a 为 Steger 和 Warming 分裂格式($\varepsilon=0$)的，图 b 为 Van Leer 分裂格式的，图 c 为 Steger 和 Warming 分裂格式但 $\varepsilon=0.04$ 的。由图可见，采用 Van Leer分裂格式消除了采用 S-W 格式出现的解在过声速点处的跳动现象；引入小参

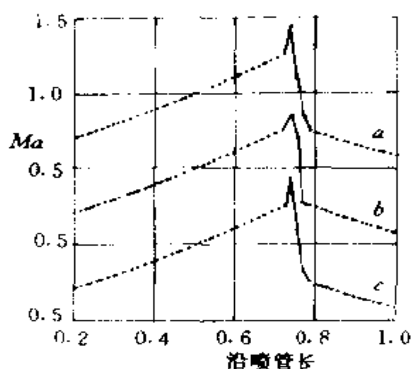


图 3-21　矢通量分裂方法计算的一维喷管中 Ma 随 x 的变化
（a. SW 方法；$\varepsilon=0$　b. VL 方法；c. SW 方法；$\varepsilon=0.04$）

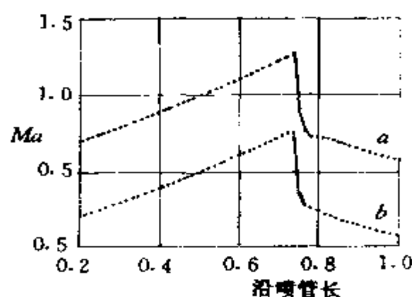


图 3-22　MUSCL 方法计算的一维喷管中 Ma 随 x 的变化
（a. SW 方法　b. VL 方法）

数 ε 的 S-W 格式也可减弱这种跳动；但所有结果都存在一个缺点，即由于采用(3-57)离散分裂造成的在激波前缘的 Ma 过冲现象。采用二阶精度的 MUSCL 分裂离散方法(式(3-65))进行计算的结果示于图 3-22。其中图 a 是S-W 格式($\varepsilon=0$)的，图 b 是 Van Leer 格式的。由图可见：①虽然两种格式中均未使用限制器，但解在激波区都消除了 Ma 的过冲现象；②由于采用 MUSCL，即使 S-W 格式未使用光滑参数($\varepsilon=0$)，仍未产生过声速点时解的跳动；③Van Leer 格式比 S-W 格式给出了更陡峭的激波形状。

图 3-23 与图 3-24 给出了采用 MUSCL 的 S-W 格式($\varepsilon=0$)和 Van Leer 格式的二维翼型绕流计算结果的比较，图 3-23 给出了几种典型算例的压强分布，图 3-24 给出了 Van Leer 格式解的收敛过程。通过比较可见：1) 在亚临界状态(图 3-23a)两者的结果都很一致，并很好地接近于基于位势理论的正确解的结果。S-W 格式的收敛速度略低于 Van Leer 格式的(图 3-24)。2) 超临界状态(图 3-23b)时，上下翼面皆出现激波，Van Leer 格式给出的激波形状比 S-W 给出的更为陡峭，但两种解皆未出现过冲现象(与上述一维情况类似)。3) 图 3-23c 为产生很强激波的计算例子，也表现了 Van Leer 格式给出的激波形状比较陡峭，而 S-W 格式的激波则跨越了两个内点。

（六）求解 N-S 方程的改进 Van Leer 格式

对流项的上述矢通量分裂格式在粘性计算中对精度的影响是人们在求解 N-S 方程时极为关注的问题。实际上，在同样网格情况下采用形式上具有同样精度的迎风型和中心型差分格式计算 N-S 方程的定态解所得的结果是有差异的，且这种差异主要表现在剪切层和驻点区内，因而在计算高速流动的热流时，这种差异会更为明显。由于通常求解 N-S 方程时对粘性项都采用中心差分，可见这种差异主要是由于对对流通量的离散方法不同而引起的。

在用不分裂通量方法，例如中心差分格式时，总焓可保持数值不变，但在用矢通量分裂方法，例如 Van Leer 方法时，总焓一般将不能保持数值不变，特别在 Ma 变化较强的区域内总焓会明显减少，这将影响驻点温度、或边界层内的温度型和壁温。Hänel 等人[15]在研究 Van Leer 格式的基础上提出用

$$F_{\text{能量}} = \pm \frac{1}{4}\rho c(Ma \pm 1)^2 h_{\text{总}}(u^+) \tag{3-66}$$

来代替(3-62)的能量通量公式。其中 $h_{\text{总}}$ 是总焓。采用这样的分裂公式可以保证总焓值守恒。图3-25

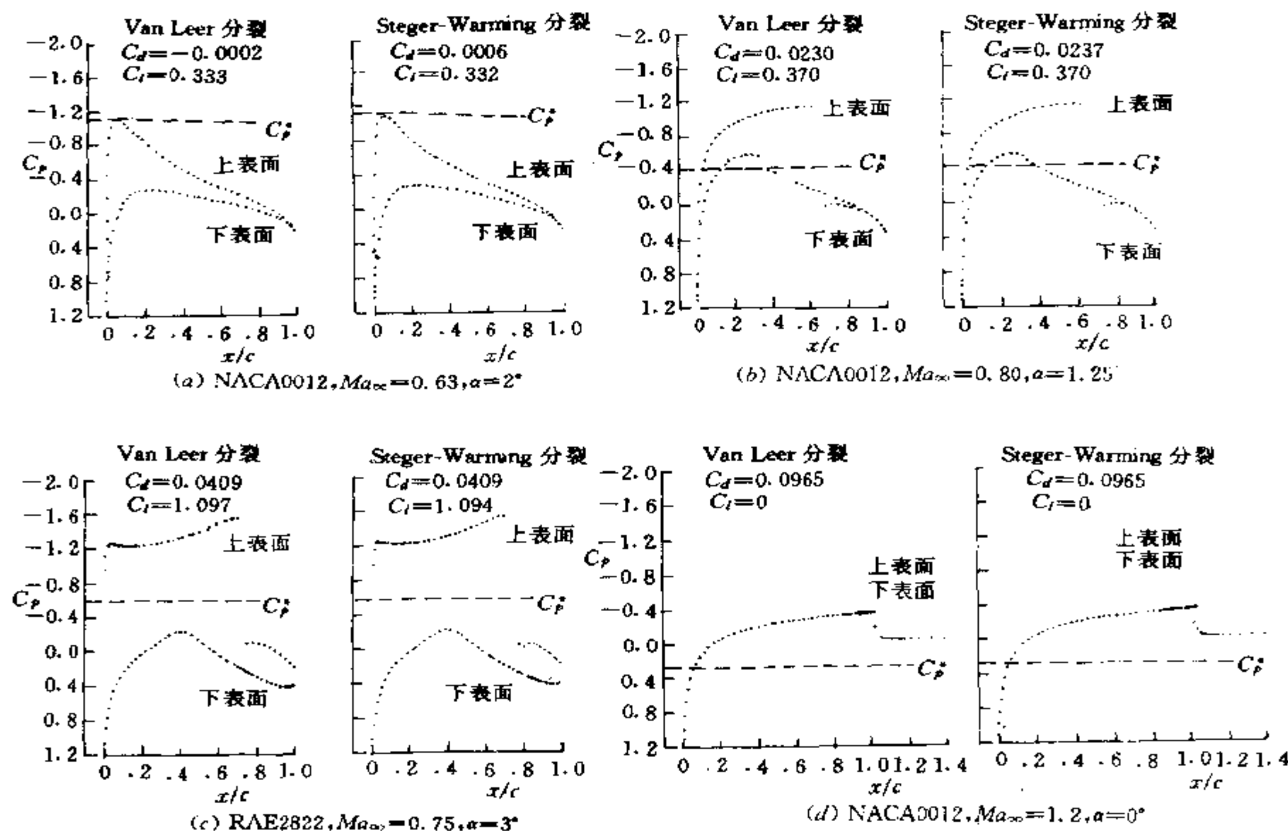


图 3-23 矢通量分裂方法计算二维翼型的压强分布比较

给出了粘性超声速来流绕半球柱物体时对称面中壁温随弧长的变化曲线（计算采用二阶迎风为主的离散格式和 Van Albada 限制器）。由图可见，这种改进的 Van Leer 格式对于壁温的计算，特别是驻点温度的计算比原来的格式有很大的改进，例如原格式计算的驻点温度超过来流值 10%，而改进格式则给出了正确的数值。

Vinokur 和 Montague 表明〔16〕，若使用 $\gamma\rho c^2/p$ 并将分裂的质量通量和 $\left(\varepsilon-\frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}\right)$ 乘积项加入到能量通量中，则可将 Van Leer 分裂格式进一步推广应用于任意气体，即可计及真实气体的效应。

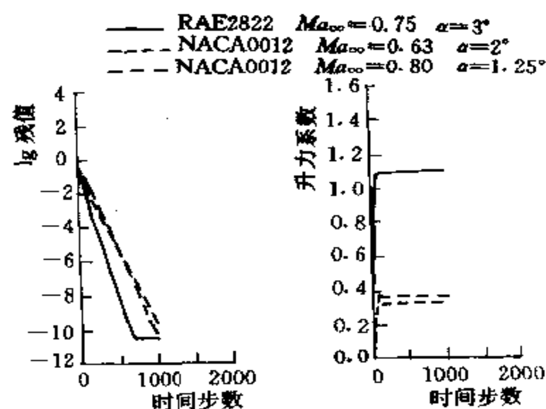


图 3-24 VL 方法计算解的收敛曲线

（七）迎风偏置格式

式(3-57)和式(3-65)的离散方式采用的是完全一侧差分。若根据引入的一个参数值的不同而获得不同的差分近似式——完全一侧型，二阶中心型或其它精度型，即为迎风偏置（Upwind-biased）近似格式。一种普遍的迎风偏置 MUSCL 型格式可以写成：

$$W^-_{i+1/2} = W_i + \frac{1}{4}[(1-k)\Delta_- + (1+k)\Delta_+]_i$$

$$W^+_{i+1/2} = W_{i+1} - \frac{1}{4}[(1-k)\Delta_+ + (1+k)\Delta_-]_{i+1} \qquad (3\text{-}67)$$

其中$(\Delta_+)_i = W_{i+1} - W_i$，$(\Delta_-)_i = W_i - W_{i-1}$

当$k=-1$，为完全一侧，$k=+1$，为二阶中心差分格式，

$k=0$，Fromm 格式，$k=\frac{1}{3}$，为三阶迎风偏置格式。

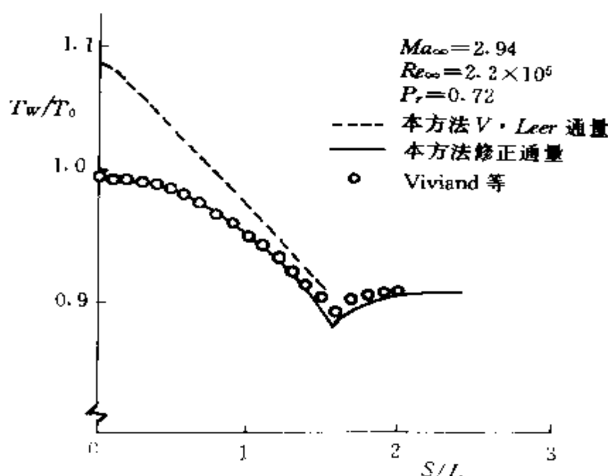


图 3-25　两种 VL 方法计算的壁温随弧长变化的比较

或者也可写成：

$$W^-_{i+1/2} = W_i + \frac{1}{4}[k_1\Delta_+ + k_2\Delta_-]_i$$

$$W^+_{i-1/2} = W_{i-1} - \frac{1}{4}[k_1\Delta_+ + k_2\Delta_-]_{i+1}$$

当$k_1=k_2=0$时，一阶迎风，$k_1=0$，$k_2=2$时，二阶迎风，$k_1=1$，$k_2=1$时，二阶迎风偏置，$k_1=2$，$k_2=0$时，二阶中心，$k_1=4/3$，$k_2=2/3$时，三阶迎风偏置。

这种迎风偏置近似较完全一侧近似只增加少量计算，却可使光滑区的解有更高的精度。

为考察不同格式（不同k值）的影响，可比较图3-26给出的在$Ma_\infty=0.8$，$\alpha=1.25°$情况下，绕

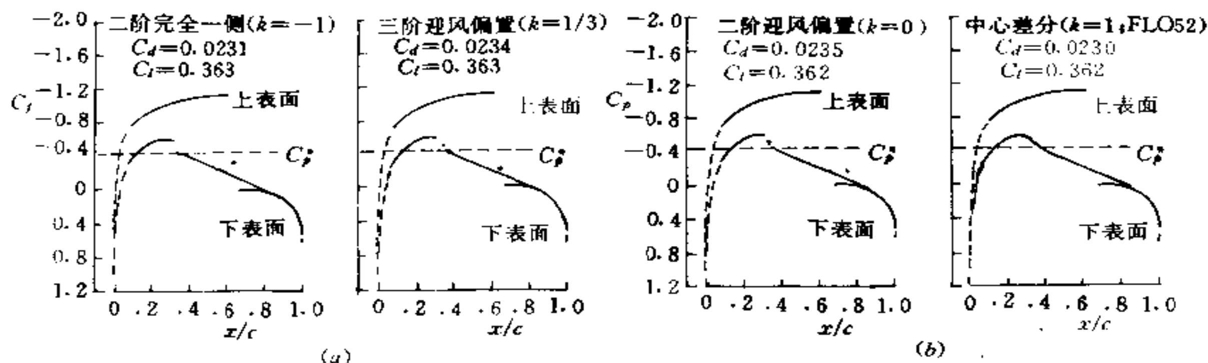


图 3-26　两种精度格式计算 NACA0012 翼型的压强分布比较

NACA0012 翼型的计算结果。所有计算结果都是采用同样的网格（160×40 网格单元的 O 型网格）求解 Euler 方程得到的，共包括三种k值（$k=-1,0,1/3$）的计算结果以及 Jameson 中心差分的计算结果。由图可见，中心差分的结果将激波抹平得很厉害，特别是下表面的激波；而三种k值的解得到了基本一致压强分布和升、阻力值，且与中心差分解相比，给出了更为陡峭的激波形状。

对于粘性流动的影响，这三种k值的结果则有明显的差异，为简单起见，可采用非线性粘性

Bürgers 方程作为模型方程进行考察。Burgers 方程为：

$$u_t + (U^2/2)_x = (\gamma U_x)_x, \gamma > 0 \tag{3-68}$$

若给定边界条件为：$x=0$ 时，$U=0$；$x\to\infty$时，$U^2=U_\infty^2$

$$U(x) = U_\infty \cdot \tanh\left(-\frac{U_\infty x}{2\gamma}\right)$$

图 3-27 给出了不同格式计算的相对误差随 x 的变化曲线。由图可见，$k=0$，1/3 和 1 的误差量级是相同的，$k=-1$ 时误差的负值增大，采用一阶迎风格式时，误差变得更大。比较说明了如下趋势：k 值愈小(即迎风比重愈大)误差愈向负值方向移动，且数值也愈大，使解的抹平程度愈大。为更清楚地说明此问题，可进一步比较二维 N-S 方程求平板边界层的解。图 3-28 给出了不同格式计算的边界层速度型与 Blasius 解的比较。由图可见，中心差分与 Blasius 解的曲线很一致，而迎风型格式($k=0$，1/3)则使速度型表现出在近壁区的不足而在近外边界区的过冲现象。这可能是通量分裂和迎风差分共同的结果。比较结果也表明采用 $k=1/3$(三阶精度)确实对解的改进有好处。

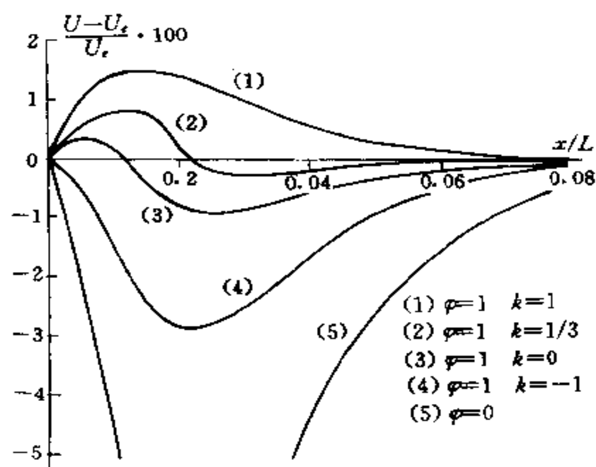


图 3-27 不同精度格式计算 Bürgers 方程解的相对误差比较

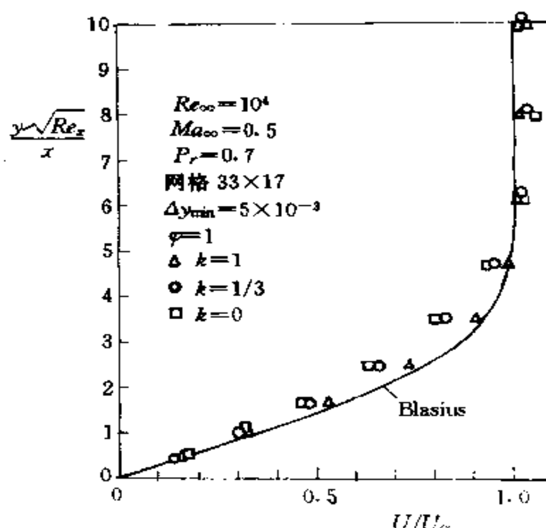


图 3-28 不同精度格式计算 Blasius 解逼比的比较

这些比较说明，在复杂流动的数值模拟中若采用 Euler 方程作为主控方程，由于忽略了粘性影响，为保持解的单调和分辨率应加重迎风的作用。近年来已获得了相当数量的高精度、高分辨率的不同差分格式。但在求解粘性绕流时，由于无粘对流项各种离散方式都隐含地引入了人工粘性，这虽然对提高复杂流动中的激波分辨率是必须的，但却同时抹平了粘性流动的解，因此必须充分研究如何提高粘流解的精度问题。

(八) 限制器

使用方程(3-67)的迎风偏置格式或式(3-65)的矢通量分裂格式时为了防止在激波附近解的过冲或过膨胀，需采用限制器(limiter)，利用限制器随流场参数的空间变化限制高阶项的作用(如方程(3-65))或使格式局部地蜕化为完全一侧的一阶或二阶精度的格式(如方程(3-67))，这在所有迎风型格式中都是十分必要的。很多作者根据各自的计算格式和研究提出了多种限制器，最早提出的是 minimum-modulus(min-mod)限制器，即

$$\min\bmod(x,y) = \text{sgn}(x)\cdot\max\{0,\min[|x|, y\,\text{sgn}(x)]\}$$

这一函数表明，如果自变量 x 和 y 同号，则取 x，y 中绝对值较小量的值，若 x，y 异号，则取零值。

使用不同的限制器往往会对解的收敛特性或解的结果产生不同的效果。Anderson 等人在迎风偏置格式中使用了两个限制器[14]。

(1)

$$W_{i+1/2}^{-} = W_i + \frac{1}{4}[(1-k)\overline{\Delta}_- + (1+k)\overline{\Delta}_+]_i$$

$$W_{i+1/2}^{+} = W_{i+1} - \frac{1}{4}[(1-k)\overline{\Delta}_+ + (1+k)\overline{\Delta}_-]_{i+1} \tag{3-69}$$

其中限制器

$$\overline{\Delta}_+ = \max[0, \min(\Delta_+ \operatorname{sgn}\Delta_-, b\Delta_- \operatorname{sgn}\Delta_+)]\operatorname{sgn}\Delta_+$$
$$\overline{\Delta}_- = \max[0, \min(\Delta_- \operatorname{sgn}\Delta_+, b\Delta_+ \operatorname{sgn}\Delta_-)]\operatorname{sgn}\Delta_-$$
$$b = (3-k)/(1-k)$$

(2)

$$W_{i+1/2}^{-} = W_i + \{S/4[(1-kS)\Delta_- + (1+kS)\Delta_+]\}_i$$
$$W_{i+1/2}^{+} = W_{i+1} - \{S/4[(1-kS)\Delta_+ + (1+kS)\Delta_-]\}_{i+1} \tag{3-70}$$

其中限制器

$$S = \frac{2\Delta_+\Delta_- + \varepsilon}{(\Delta_+)^2 + (\Delta_-)^2 + \varepsilon}$$

ε 是防止分母为零的一个小数($\varepsilon=10^{-6}$)。第一种限制器是不可微的,第二种是可微的。图 3-29 给出了 NACA0012 翼型的绕流在 $Ma_\infty=0.80$,$\alpha=1.25°$(161×41 的 C 型网格)条件下计算收敛速度的比较。由图可见,不可微限制器会使收敛过程出现振荡变化。而第二种可微限制器使残值连续不断地减小。

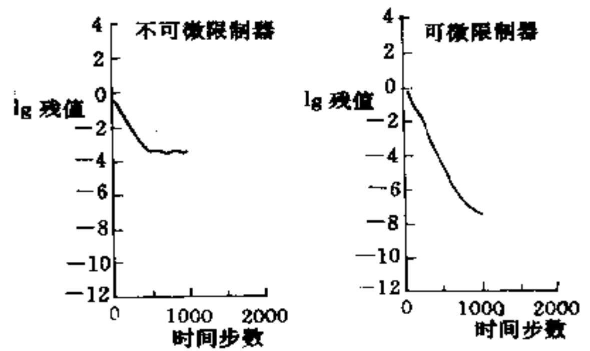


图 3-29 两种限制器计算 NACA0012 时收敛速度的比较 $Ma_\infty=0.80$ $\alpha=1.25°$

Scott 等利用有不同限制器的三种三阶迎风偏置格式计算了激波管的流动[17]。所采用的限制器计有

(1) min mod 限制器

$$\overline{\Delta}_+ = \min \bmod(\Delta_+, w\Delta_-)_i, \overline{\Delta}_- = \min \bmod(\Delta_-, w\Delta_+)_{i+1} \tag{3-71}$$

且 $\min \bmod(x, wy) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \max\{0, \min[|x|, \operatorname{sgn}(x) \cdot wy]\}$

$$w = \frac{3-k}{1-k}$$

(2) Van Albada 限制器

$$\overline{\Delta}_+ = \frac{\Delta_-[\Delta_+^2 + \rho] + \Delta_+[\Delta_-^2 + \rho]}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2 + 2\rho} \tag{3-72}$$

其中 $10^{-7} \leqslant \rho \leqslant 10^{-6}$

(3) Woodward-Colella 限制器

$$\overline{\Delta}_+ = \min \bmod(\Delta_-, \Delta_+, 0.5(\Delta_+ + \Delta_-)) \tag{3-73}$$

(4) Superbee(巨蜂)限制器

$$\overline{\Delta}_- = S \cdot \max[0, \min(2|\Delta_-|, S\Delta_-), \min(|\Delta_+|, 2S\Delta_-)] \tag{3-74}$$

$$S = \operatorname{sgn}(\Delta_+)$$

图 3-30 给出了 $t=0.24$ 时的密度分布曲线。由图可见,不同限制器对解的精度有不同的影响,相比

之下不同分裂方法的影响比不同限制器的影响要小，因此研究与讨论限制器的影响是很必要的。由图可见，Van Albada 限制器的结果最好，它和 W-C 限制器都能提高解的准确度和激波与接触波的分辨率；而 min mod 限制器则将解抹平得较多。正如 Yee 曾指出的〔18〕公式(3-71)～公式(3-74)的次序反映了扩散程度的依次减小，因而 min mod 是扩散性限制器(diffusive limiter)。Van Alabda 是压缩性限制器(Compressive limiter)，W--C 和 Superbee 是压缩性更大的限制器。由于 Scott 计算时采用的都是迎风型格式。格式本身隐含带有耗散，再采用扩散性的限制器必然会使计算产生过大的人工耗散，造成解的较大抹平，因而不是好的选择。反之采用压缩性的限制器如 Van Albada 和 W-C 限制器则较为合适，Superbee 压缩过大而使解的质量变坏。

Scott 又进一步用二维钝头体的绕流为例讨论了 MUSCL 的迎风偏置型格式采用不同限制器时对计算稳定性和收敛速度的影响。图 3-31 给出了对理想气体的计算结果。由图可见，限制器在 S-W 和 Van Leer 格式中的影响与 Yee 在 TVD 格式中的影响一致。即扩散性的限制器比压缩性的使计算更稳定，min mod 比其他的限制器使计算更稳定，对于 Roe 格式，只有 Van Albada 限制器方可使解达到稳定。对拱形头激波位置的计算结果表明，Van Albada 限制器在三种格式中都能取得很一致的结果。

上述简单的比较研究表明，对于迎风偏置型格式的计算采用压缩性的限制器虽然可能会稍降低解的稳定性和收敛速度，但可获得较好的精度。

应当说明与跨声速或小超声速不同，高超声速包含很强的激波，因而其计算结果受限制器的影响更加敏感。

图 3-32 给出了带或不带限制器计算粘性 Bürgers 方程(3-68)所得结果的比较，图中 $\varphi=1$，表示不用限制器，$\varphi=\varphi_{VAL}$表示采用 Van Albada 限制器。由图可见，限制器会使所有结果(用不同精度的格式)都有更大的负误差，即有抹平解的效果。这显然是由于无粘对流项的限制器与曲率效应相互作用而减小了高阶项的作用，增大了人工粘性的结果。对 N-S 方程的计算也显示出同样的趋势，因此求解 N-S 方程时，从粘流区来说希望选择更具有压缩性而非更扩散性的限制器。

(九) 三维算例

第一个算例的外形是 ONERA M6 机翼。计算 $Ma_\infty=0.84$，$\alpha=3.06°$，计算的网格分别为 97×17×17 和 193×33×33 的 CO 型网格，图 3-33 给出了采用多重网格技术的 Van Leer 分裂格式求解 Euler 方程的计算结果〔19〕。图中给出了两种网格下的计算压强分布与实验值的比较。由图可见，两种网格的计算结果都与实验值吻合得较好，细网格捕获的激波更为陡峭。

第二个算例是高超声速气流绕返回舱(Viking Lander Capsule)外形的无粘流动计算〔20〕。计算的 $Ma_\infty=10$，α 分别为 0°，4.3°，8.5°，12.0°，16.5°，20.5°及 26.5°，计算网格为 138×42×22 的 O 型网格。图 3-34 为计算网格的图形。

图 3-35 给出了一阶精度与三阶精度的迎风偏置格式在 $\alpha=4.3°$时计算等温线图的比较。由图可见一阶精度计算结果的明显不足。图 3-36 给出了对称平面内表面压强分布的计算值与实验值的比较，为清楚地显示后部的计算与实验结果的差别，图中在 S/R 超过 1.0 后的压强值皆被放大了 10 倍。由图可见，在物面上计算值与实验值吻合得很好，由于计算中忽略了粘性作用，故底部压强计算值低于实验值。

第三个算例是低速大迎角绕小展弦比尖前缘三角翼的层流流动的计算〔21〕。计算的 $Ma_\infty=0.3$，$\alpha=0°\sim40°$，$Re_\infty=0.95\times10^6$，三角翼展弦比为 1，前缘后掠角为 75.96°，图 3-27 给出了 $\alpha=20.5°$时不同流向位置处计算的等总压线图，清楚地表明了一次涡与二次涡的流向发展。

图 3-38 为计算的等总压线和烟流实验结果的比较，可见两者很一致。图 3-39 给出了升力线随

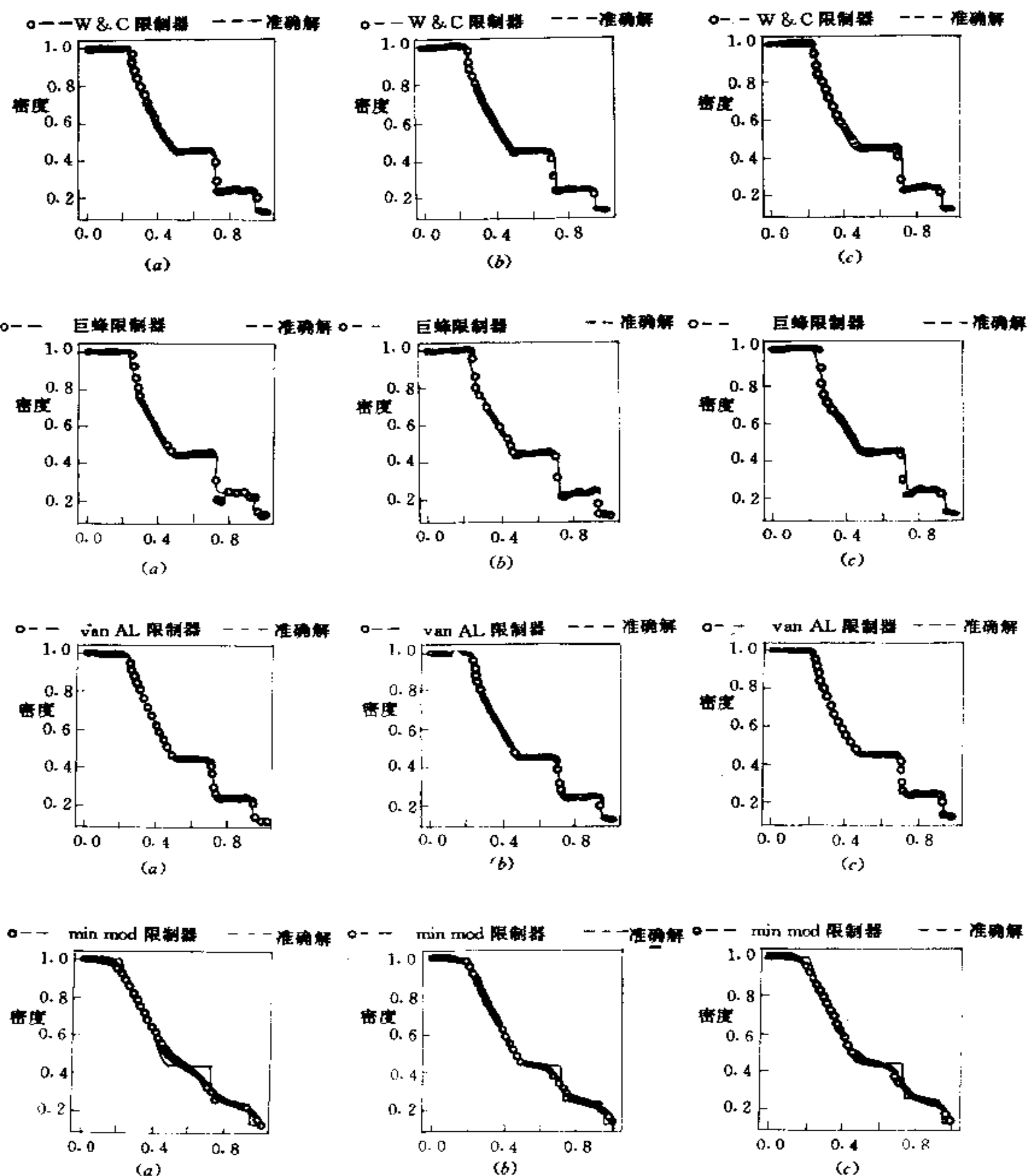


图 3-30 不同限制器的 MUSCL 方法计算完全气体绕激波管解的比较

(a) SW 格式 (b) VL 格式 (c) Roe 格式

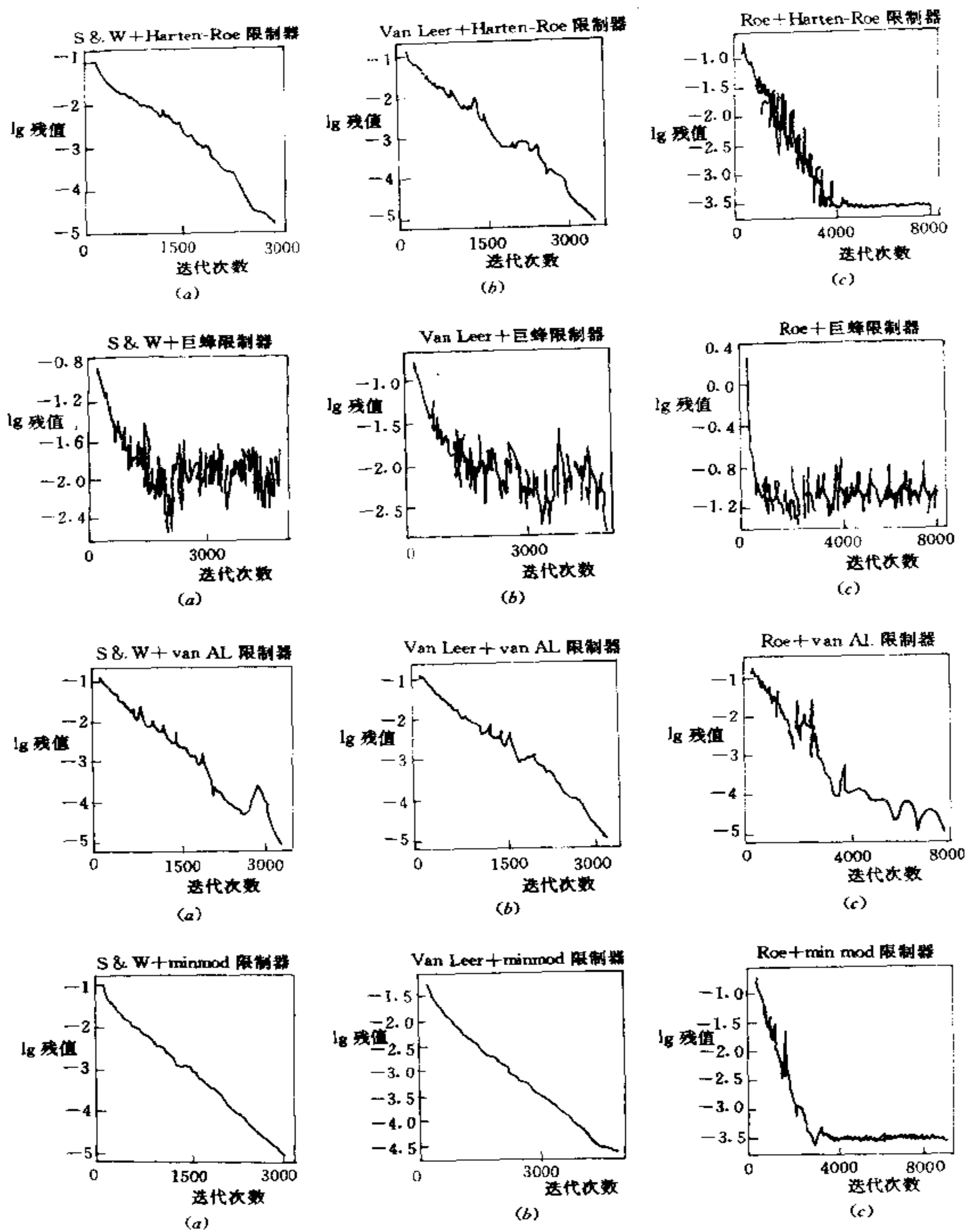


图 3-31　不同限制器的 MUSCL 方法计算二维钝头体完全气体绕流的收敛速度的比较

(a) SW 格式　　(b) VL 格式　　(c) Roe 格式

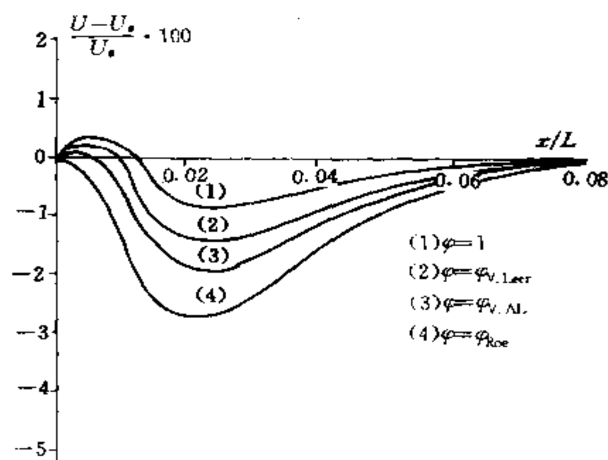


图 3-32 限制器对 Burgers 方程解的影响

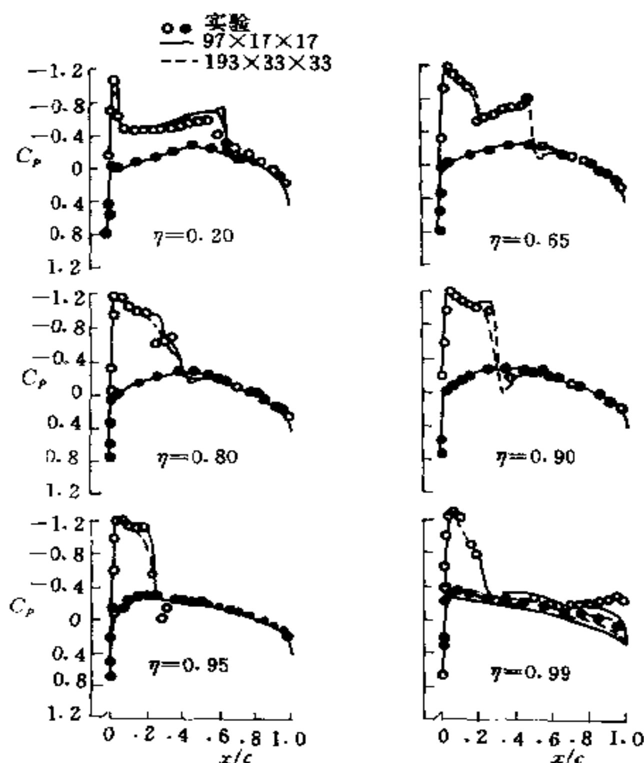


图 3-33 VL 方法计算 ONERA M6 机翼的压强分布与实验值的比较

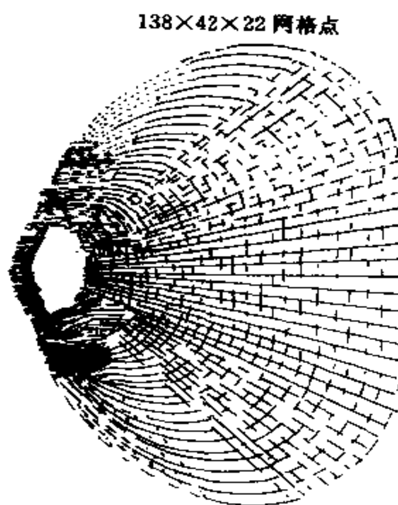


图 3-34 计算网格

迎角变化的计算值与实验结果的比较，可见直到迎角达 30°之前计算值都与实验值吻合得很好，充分显示了升力曲线的非线性特性。实验的最大升力系数发生于 $\alpha=33°$，$C_L=1.06$，这时在后缘开始发生涡破裂；计算的最大升力系数为 1.10，发生于 $\alpha=35°$，可见计算值与实验值吻合得很好。图 3-40给出了 $\alpha=40°$时流向速度分量等值线沿流向的变化，可以见到前缘附近的加速流动($u/u_\infty \geqslant 1.2$)及后缘附近存在的回流区($u/u_\infty \leqslant -0.1$)表明了“气泡”型的涡破裂。流线轨线计算结果也表

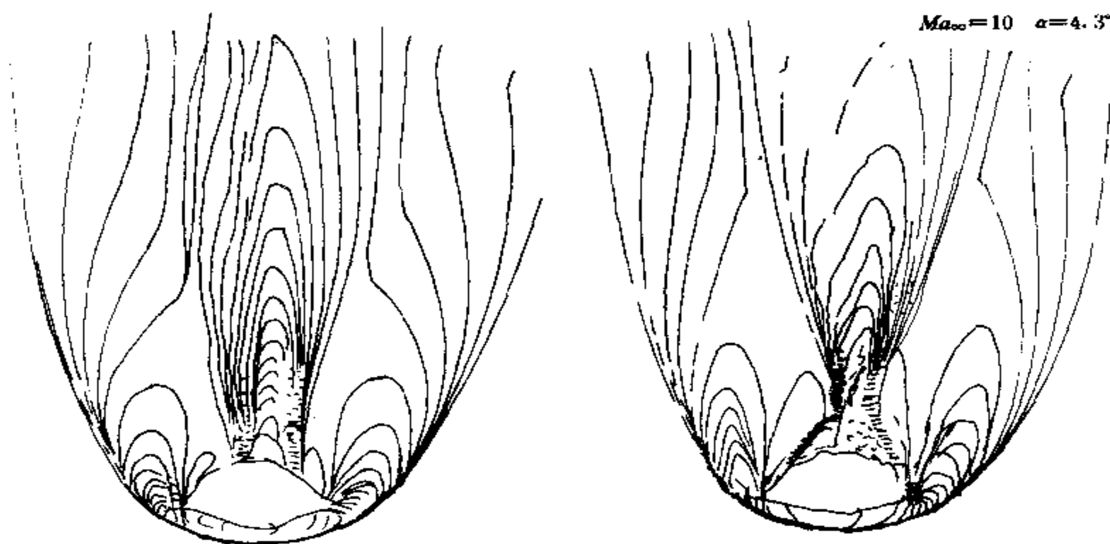


图 3-35 一阶与三阶迎风偏置格式计算的等温线的比较 $\alpha=4.3°$

明在 $\alpha=40°$时，从 $x/l=0.6$ 直到后缘处存在着回流区，这与 Payne 等[22]在实验中发现 75°后掠的三角翼在 $Re_\infty=0.42\times10^6$，$\alpha=40°$时，从 $x/l=0.4$ 附近直到后缘存在着涡破裂点随时间周期变化的现象很相近。

这里并不准备讨论湍流流动的计算结果，因为湍流模型对湍流流动的计算结果影响很大，这一问题将在第四章中讨论。

二、通量差分裂方法

（一）黎曼解方法

为与以下各节中的公式一致，现将一维守恒形式 Euler 方程组(3-35)～(3-40)中 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别改写成 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{f}$。它的一般显式守恒差分格式为

$$\boldsymbol{u}_j^{n+1}=\boldsymbol{u}_j^n-\lambda[\tilde{\boldsymbol{f}}_{j+1/2}^n-\tilde{\boldsymbol{f}}_{j-1/2}^n] \tag{3-75}$$

其中 $\lambda=\Delta t/\Delta x$。

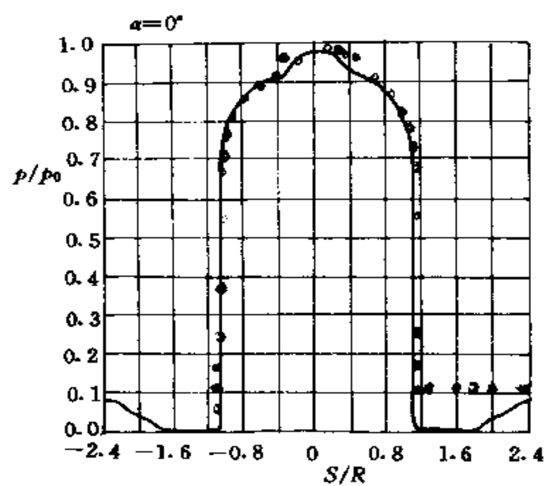
Godunov 首先提出假设在每一网格间距内 $\boldsymbol{u}$ 为常数，即对于每个$(j+\frac{1}{2})\Delta x$，$\boldsymbol{u}^L=\boldsymbol{u}_j$，$\boldsymbol{u}^R=\boldsymbol{u}_{j-1}$。若 Δt 足够小，$j-\frac{1}{2}$和 $j+\frac{3}{2}$点处的波尚未传到 $j+\frac{1}{2}$点处，则可求得黎曼问题的准确解，表为 $\boldsymbol{u}_{j\pm1/2}^{n\pm1/2}$，而格式(3-75)中的数值通量 $\tilde{\boldsymbol{f}}_{j+1/2}^n=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j+1/2}^{n+1/2})$。这就是著名的 Godunov 格式[1]。它是一阶精度的数值格式。Van Leer 用逐段线性分布的假设代替逐段常值分布的假设获得了二阶精度的 Godunov 格式[13]。Ben-Artzi 和 Falcovitz 也使 Godunov 正确黎曼解方法取得了二阶精度[23]。与 Godunov 方法相仿的还有 Glimm[24]与 Chorin[25]的随机选取法等。

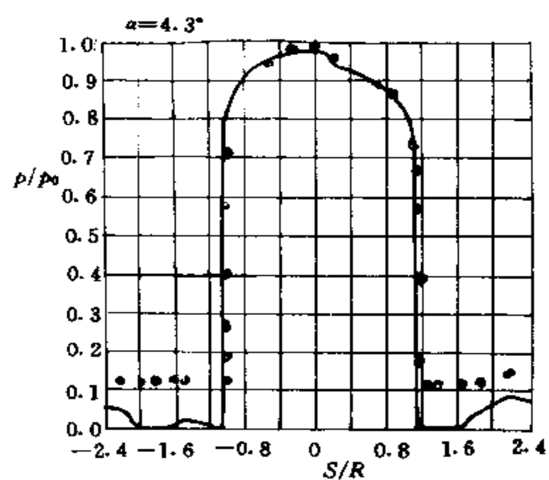
（二）Roe 的近似黎曼解方法

Godunov 格式和随机选取法的计算工作量都比较大，难以推广到多维问题的求解。

因黎曼解仅取决于每一网格两边的函数值，Roe 提出用下述方法求取这些函数值而得到 Roe 的近似黎曼解方法[26]。

将一维守恒形式 Euler 方程组写作





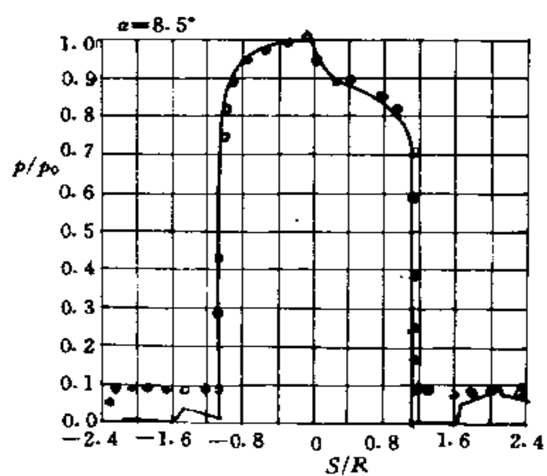


图 3-36 对称平面上不同迎角时的压强分布比较

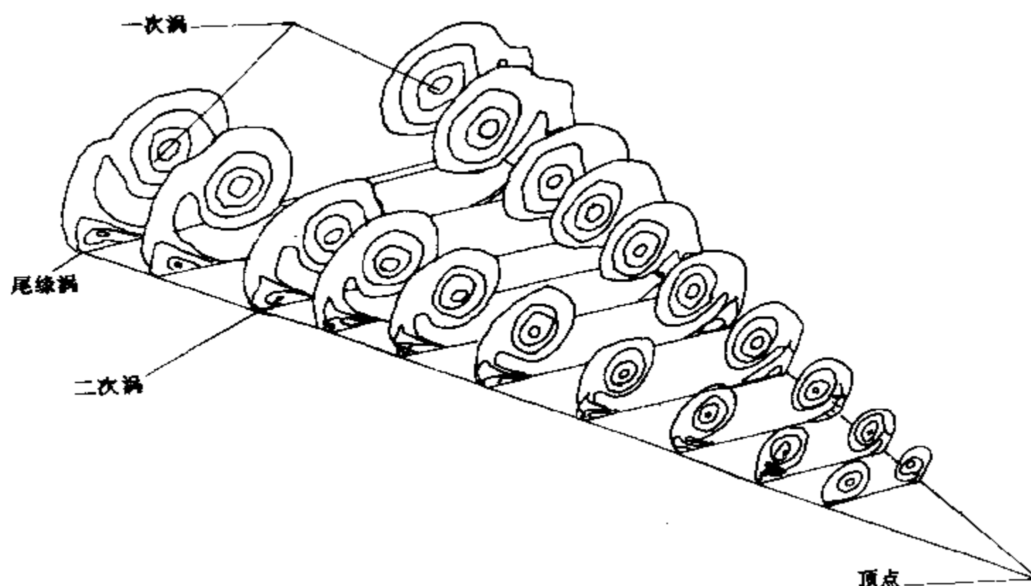


图 3-37　总压等压线，A=1，$\alpha=20.5^\circ$　$Re_l=0.95\times10^6$　$Ma_\infty=0.3$

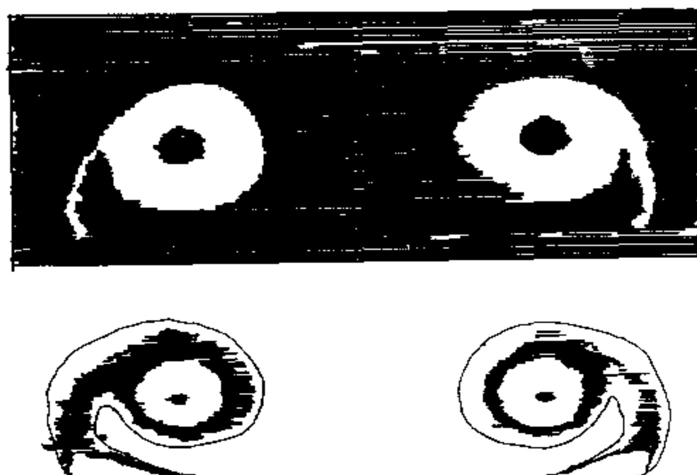


图 3-38　总压等压线计算与实验值的比较

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\tilde{\mathbf{A}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}=0 \tag{3-76}$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^L,\boldsymbol{u}^R)$ 为常数矩阵，在某种意义上是 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的平均矩阵，并具有如下性质：

1. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^R)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^L)=\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{u}^R,\boldsymbol{u}^L)(\boldsymbol{u}^R-\boldsymbol{u}^L)$

2. $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$，其中 $A=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$

3. $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{u}^L,\boldsymbol{u}^R)$ 有实特征根和完备的特征向量；　　(3-77)

4. $\boldsymbol{u}^R-\boldsymbol{u}^L=R(\boldsymbol{u}^R,\boldsymbol{u}^L)\alpha$，其中 α 为第 k 个特征波的强度。Roe 称上述性质为 u 特性。条件 2 保

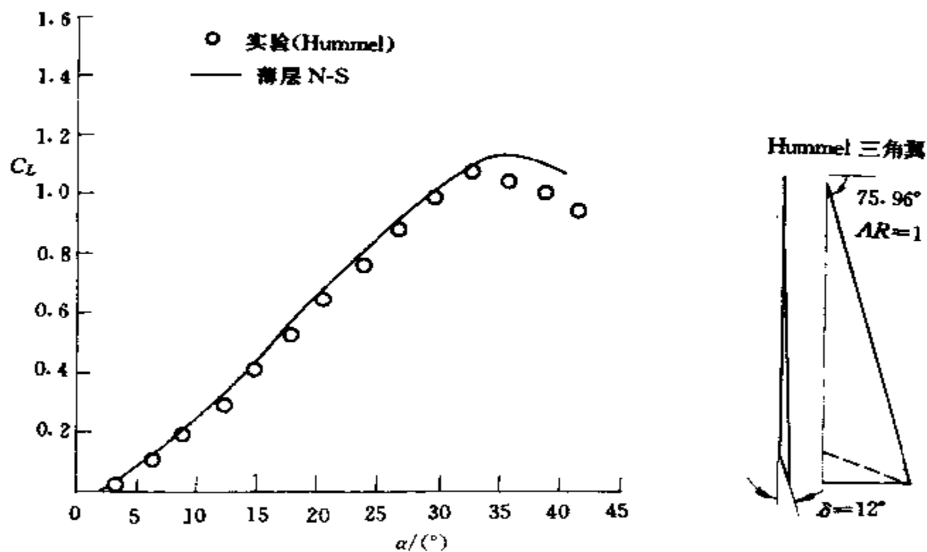


图 3-39　升力线随迎角变化的比较

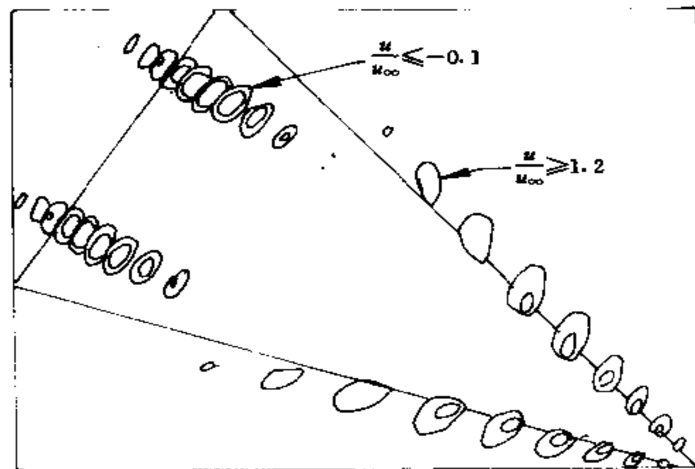


图 3-40　流向的等速度线 $Ma_\infty=0.3$，　$\alpha=40°$，　$Re_l=0.95\times10^6$

证了光滑区内 $\tilde{A}$ 的连续性；条件 1 表明若 u^L 和 u^R 两点间仅有一个间断面，则近似解是原微分方程的准确解。因为 $f(u^R)-f(u^L)=\sum\alpha_k\lambda_k e_k$，其中$\{e_k\}$是 $\tilde{A}$ 的右特征向量，α_k 是第 k 波的强度，λ_k 是第 k 波的速度（$\tilde{A}$ 的特征值），同时 $u^R-u^L=\sum\alpha_k e_k$，因此当 u^R 和 u^L 位于一个激波的两侧时，必须满足 Rankine-Hugoniot 关系，即 $f(u^R)-f(u^L)=V(u^R-u^L)$，其中 V 是激波速度。由此可见，对所有的 k 有 $V\alpha_k=\lambda_k\alpha_k$，这要求所有的 α_k 除一个以外必须为零，这表明近似解确是原微分方程的准确解。这是此方法的一个重要特征。Van Leer 等在文献〔27〕中比较了各种数值通量，表明 Roe 方法具有最高分辨定态激波的能力，能在 0-1 个网格之内捕获激波，而其它数值通量却无法做到这一点。通常的算术平均方法如

$$\tilde{A}=\frac{1}{2}(A^L+A^R)\text{ 或 }\tilde{A}=A[\frac{1}{2}(u^L+u^R)]$$

求得的 $\boldsymbol{A}$ 都不能满足 u 特性，Roe 通过引入参变量的办法给出了一种求得满足 u 特性的 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 矩阵的办法，即对一维 Euler 方程取

$$u = \frac{u^L + Du^R}{1 + D}, \quad h = \frac{h^L + Dh^R}{1 + D}, \quad D = \sqrt{\rho^R/\rho^L}$$

$$c^2 = (\gamma - 1)[h - \frac{1}{2}u^2] \tag{3-78}$$

（三）Roe 的一阶迎风格式

标量双曲守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{3-79}$$

的三点显式守恒差分格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\overline{f}_{j+1/2}^n - \overline{f}_{j-1/2}^n) \tag{3-80}$$

或

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda D_1^n - \lambda D_2^n \tag{3-81}$$

其中 D_1 代表 f 或 u 的前向差分，如

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1(f_j, f_{j+1}, u_j, u_{j+1})(f_{j+1} - f_j) = \\ &\quad A_2(f_j, f_{j+1}, u_j, u_{j+1})(u_{j+1} - u_j) \end{aligned} \tag{3-82}$$

D_2 代表 f 或 u 的后向差分，如

$$\begin{aligned} D_2 &= B_1(f_{j-1}, f_j, u_{j-1}, u_j)(f_j - f_{j-1}) = \\ &\quad B_2(f_{j-1}, f_j, u_{j-1}, u_j)(u_j - u_{j-1}) \end{aligned} \tag{3-83}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 为已知函数。

Roe 的一阶迎风格式为：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}[f_{j+1}^n - f_{j-1}^n - |a_{j+1/2}^n|\Delta_{j+1/2}u^n + |a_{j-1/2}^n|\Delta_{j-1/2}u^n] \tag{3-84}$$

$$a_{j+1/2}{}^{*} = \begin{cases} (f_{j+1} - f_j)/\Delta_{j+1/2}u & 当\ \Delta_{j+1/2}u \neq 0 \\ a(u_j) & 当\ \Delta_{j+1/2}u = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_{j+1/2}u = u_{j+1} - u_j$$

与(3-81)式相比，可知 $D_1 = \frac{1}{2}[a_{j+1/2} - |a_{j+1/2}|](u_{j+1} - u_j)$ 和 $D_2 = \frac{1}{2}[a_{j-1/2} + |a_{j-1/2}|](u_j - u_{j-1})$。比较式(3-84)与(3-80)可知

$$\overline{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - Q(a_{j+1/2})\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-85}$$

$$Q(a_{j+1/2}) = |a_{j+1/2}|$$

其中 Q 称为数值粘性项的系数。

由于式(3-84)并不与熵条件一致，故可能会收敛为一非物理解。为满足熵条件，可对 $Q(z)$ 作如下的修正，即

$$Q(z) = \begin{cases} |z| & 若\ |z| \geqslant \delta_1 \\ (z^2 + \delta_1^2)/2\delta_1 & 若\ |z| < \delta_1 \end{cases} \tag{3-86}$$

（四）一维非线性守恒系的 Roe 方法

将式(3-77)或式(3-78)中的平均值与式(3-85)的一阶迎风格式相结合即构成通量差分裂的 Roe 方法，即格式(3-75)中的数值通量为：

---

* 为书写简单，并在不影响理解的情况下，上述公式中省略了上标 n，以下讨论中也类似。

$$\tilde{f}_{j-1/2} = \frac{1}{2}[f_{j-1} + f_j - R_{j+1/2}|\Lambda_{j-1/2}|a_{j-1/2}] \tag{3-87}$$

其中

$$R_{j+1/2} = R(u_{j+1/2}), \Lambda_{j+1/2} = \begin{bmatrix} \lambda^1_{j+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2_{j+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3_{j+1/2} \end{bmatrix} \tag{3-88}$$

$$a_{j+1/2} = R^{-1}_{j-1/2}(u_{j+1} - u_j)$$

带下标"$j+1/2$"的变量表示取该变量在 j 和 $j+1$ 网格之间的某种平均值，可取式(3-78)计算的平均值。

（五）Roe 的迎风偏置通量差分裂方法

运用 MUSCL 方法于上述一阶数值通量即可获得空间的高阶精度差分方法，即用 $u^R_{j+1/2}$和 $u^L_{j+1/2}$分别代替 u_{j-1}和 u_j。u^R_{j+1}和 u^L_{j+1}按式(3-67)定义，即

$$u^R_{j-1/2} = u_{j+1} - \frac{1}{4}[(1-k)\Delta_{j+3/2} + (1+k)\Delta_{j+1/2}]$$

$$u^L_{j-1/2} = u_j - \frac{1}{4}[(1-k)\Delta_{j-1/2} + (1+k)\Delta_{j+1/2}] \tag{3-67a}$$

当 $k=-1$ 时为完全一侧型，$k=+1$ 为二阶中心差分，$k=0$ 为 Fromm 格式，$k=1/3$ 为二阶迎风偏置格式。

这样，式(3-87)的数值通量可写作：

$$\tilde{f}_{j-1/2} = \frac{1}{2}[f(u^R_{j+1/2}) + f(u^L_{j-1/2}) + R_{j-1/2}|\Lambda_{j+1/2}|a_{j+1/2}]$$

$$a_{j-1/2} = R^{-1}_{j+1/2}(u^R_{j+1/2} - u^L_{j+1/2}) \tag{3-89}$$

为防止解在激波附近出现振荡，可采用限制器。

（六）数值算例

Bonhaus, D. L. 和 Wornom, S. F. 对跨声速三维机翼绕流采用 CFL3D 计算程序（Roe 通量差分裂格式(FDS)和 TLNS3D 计算程序（中心差分格式）作出了对比计算[28]。计算所用的机翼有 ONERA M6 和 Lockkeed Wing B，湍流模型为 Baldwin-Lomax 模型，计算状态分别为 $Ma_\infty=0.84$，$\alpha=3.06°$(M6 机翼)和 $Ma_\infty=0.851$，$\alpha=2.95°$(Wing B)，计算所用网格为 CO 型，包括 289×65×49，193×49×33，145×33×25 和 97×25×17 等细粗不同的网格。图 3-41 和 3-42 分别给出了两种机翼在不同粗细网格下计算与实验压强分布的比较。图 3-41 表明，对 M6 机翼在不同网格数的情况下 CFL3D 给出了彼此很一致的激波强度（即激波分辨率都很高）。网格细化只改善前缘膨胀波的捕获能力；而用 TLNS3D 时网格细化对激波的分辨率和前缘膨胀波的捕获能力都有明显的改进。Wing B 的网格细化对两种方法结果的影响基本一致，即都改善了激波的分辨率和前缘膨胀波的捕获能力。图 3-43 给出了在 289×65×49 的细网格情况下两种方法的收敛历史情况，清楚地表明了 TLNS3D 在细网格情况下快速收敛的特点，尽管在粗网格情况下(97×25×17 和 145×33×25)两种计算程序具有相当的收敛速率。为了定量估计在给定网格下两种程序的相对有效值，取升力，粘性阻力和压差阻力的相对变化小于 0.5%作为收敛判据，则为达到收敛，CFL3D 要求的 CPU 时间约为 TLNS3D 所要求的二倍（在细网格情况下），如网格为 193×49×33 时 CFL3D 要求的 CPU 时间要多 40 min～50min，在 289×65×49 时，则要多 2h～3h。

图 3-44 给出了对 M6 机翼计算的升力、俯仰力矩、阻力等误差随网格数变化的曲线。可见当网格数足够大时，误差变化曲线的斜率趋于 2，表明了方法的二阶精度。曲线还表明，CFL3D 计算的

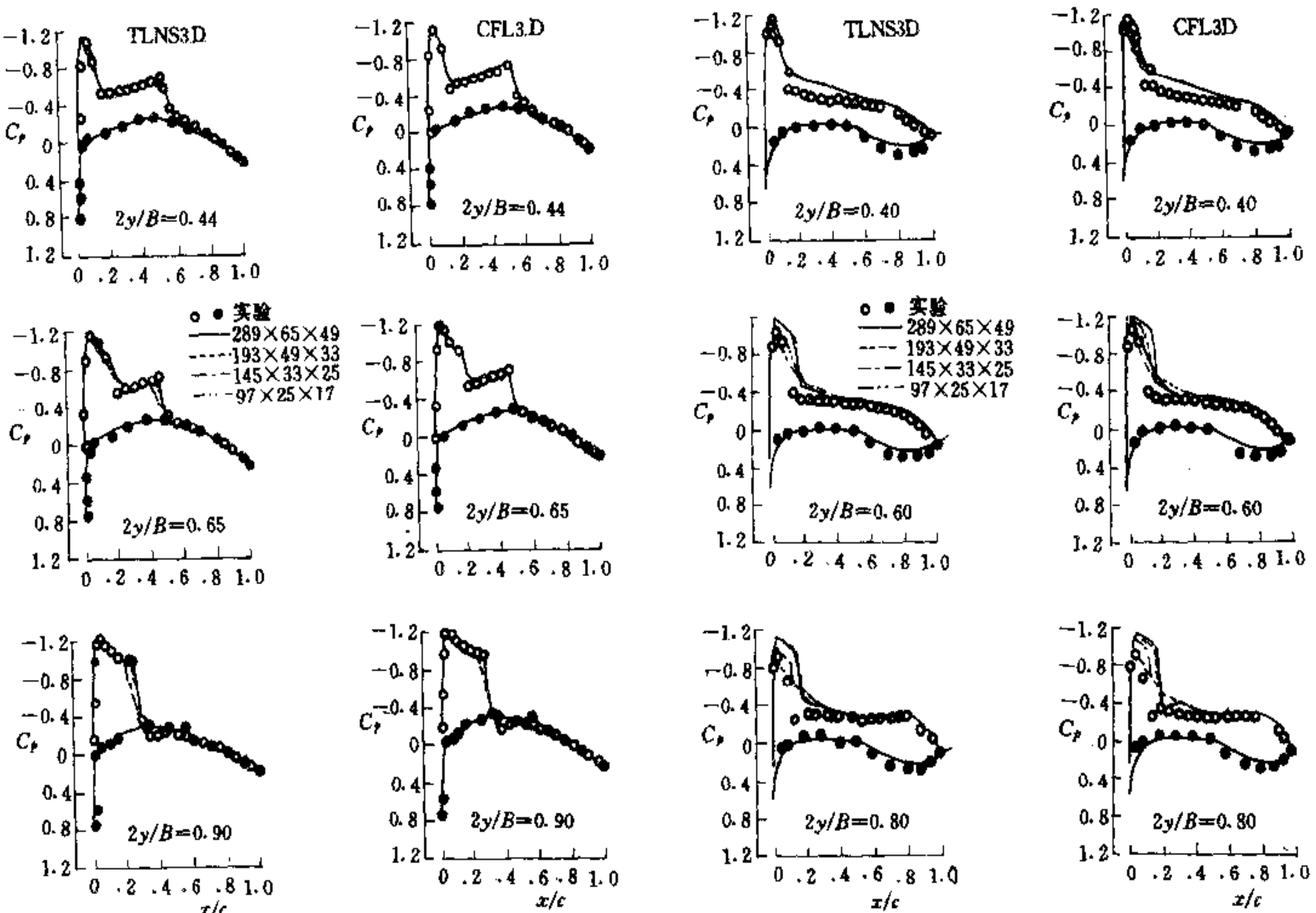


图 3-41　M6 机翼的计算和实验压强分布的比较

图 3-42　Wing B 的计算和实验压强分布的比较

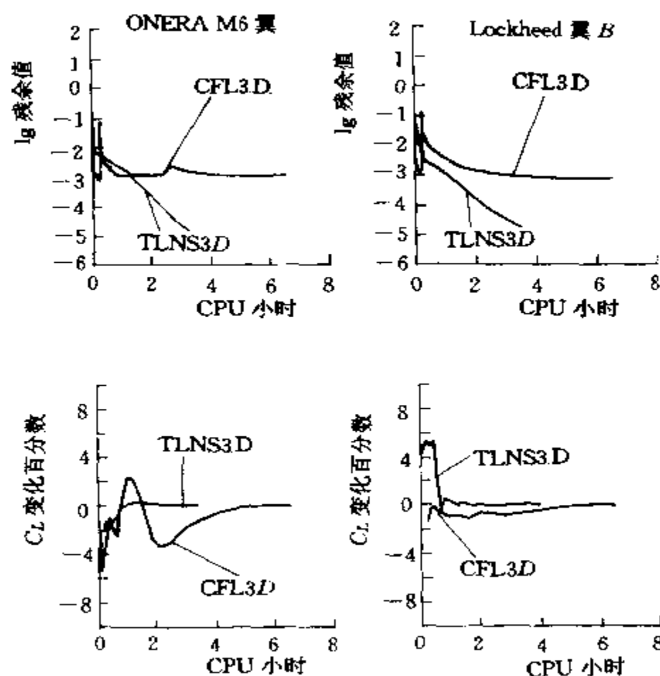


图 3-43　两种方法收敛速度的比较

精确性比 TLNS3D 的要高，特别是其阻力的计算结果随网格数的变化不那么敏感。

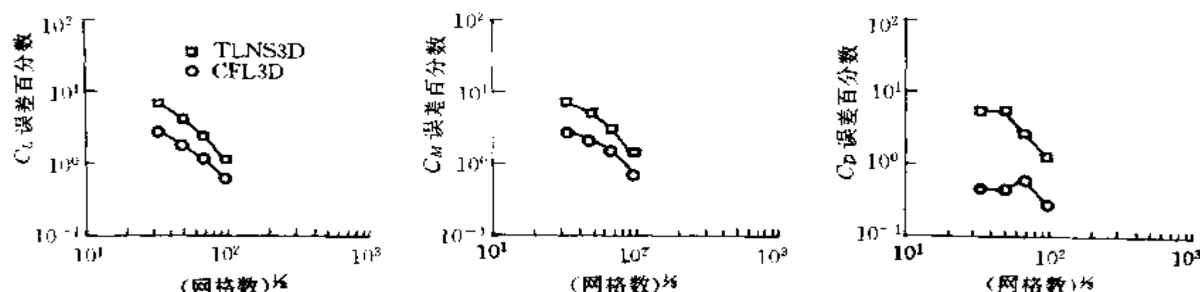


图 3-44　两种方法计算 M6 机翼气动力系数随网格数的变化

图 3-45 给出了以升力、俯仰力矩、总阻力和升阻比等误差的 L_2 模式作为精度标准时两种程序的计算结果。可见，在给定的网格数下 CFL3D 计算结果更准确，对 M6 机翼 TLNS3D 采用 289×65×49 个网格(884,736 个有限体积单元)所得的计算精度与 CFL3D 采用 511,113 个网格单元的相当，即后者可减少 42%的网格单元达到同样的计算精度。然而使用者更为关心的是在给定精度下方法的相对有效性。图 3-46 给出了 TLNS3D 使用 289×65×49 个网格与 CFL3D 使用 193×49×33 个网格(后者较前者的网格总数减少了 67%)的计算结果。可见两者收敛速度相当，需要相同的 CPU 时间。综合比较图 3-45 和 3-46 的结果，可见，为达到相同的精度 TLNS3D 程序的计算效率更高(CFL3D 较 TLN3D 的网格数减少 42%时达同等精度。减少 67%时收敛速度相当。而减少 42%时的计算时间显然较减少 67%时的更长。)

上述算例表明，通量差分裂方法的优点是为防止解出现振荡而需引入的人工粘性较小，因而捕获激波的分辨率高，适宜于较复杂流动的计算，但需付出计算量较大的代价。图 3-47 表示了采用通量差分裂方法(二阶 Roe 的黎曼解方法)计算的短距起落飞机-“飞鸟”在 $Ma_\infty=0.8$ 时 Euler 解的

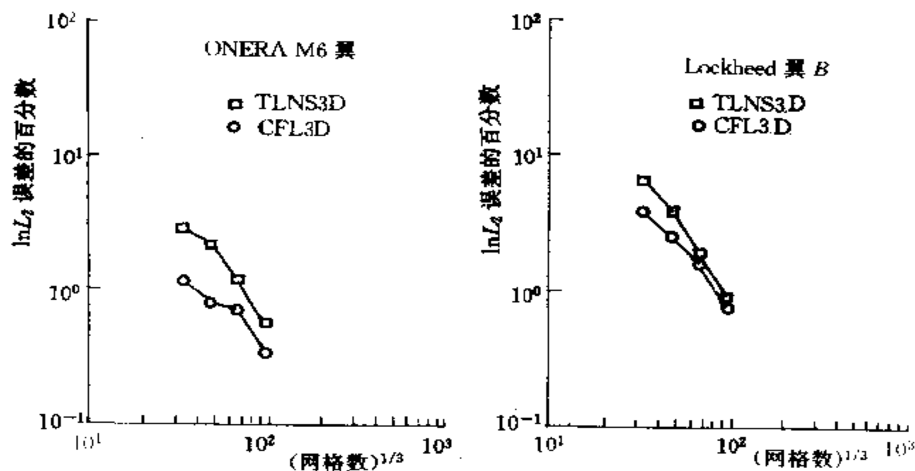


图 3-45　两种方法计算 M6 机翼误差的比较

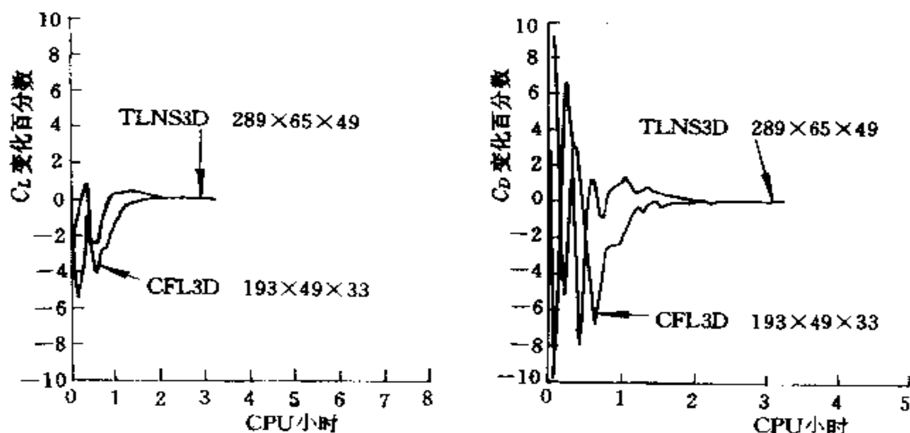


图 3-46　两种方法计算机时的比较

等压线分布〔29〕，计算网格为 162×103×73。

第三节　TVD 格式

1972 年 Lax〔30〕对非线性双曲方程仔细分析后指出：(1) 任何两组特征线之间微分解的变化量（增加或减少）是守恒的；(2) 两特征线之间 $c(u)$ 增加的总量随时间减小。基于此理论形成了保单调性格式的概念并构成了保单调性格式。1983 年 Harten 首先证明了计算格式具有 TVD (Total Variation Diminishing 总变差减小）性质的充分条件并具体构造了修正通量的高分辨率（二阶）TVD 格式〔31〕。Jameson 和 Lax 给出了多点非线性格式具有 TVD 性质的充分条件〔32〕。80 年代人们研究和发展了一系列 TVD 类型的格式〔33〕。这些格式都首先从适用于跨、超声速计算开始，再推广到高超声速的计算。

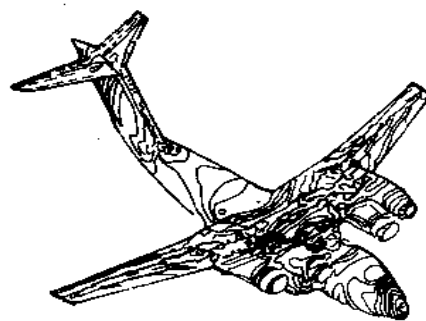


图 3-47　“飞鸟”表面等压线分布

一、TVD 的概念

对一个定义在区间$[a,b]$(a,b 可为$\pm\infty$)上的有界函数$f(x)$,其总变差$TV(f(\cdot))$是这样定义的:设$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$是$[a,b]$的一组分点,则称$V(x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$为$f$对此分点组的变差。对一切可能的分点组,所有相应变差值形成的数集的上界即为$f(x)$在$[a,b]$上的总变差,或$\sup V(x_0,\cdots,x_n)=TV(f)$。这里分点的个数是任意的,可为无限多。对每一分点组其变差显然均为正。对于微分方程数值解$u(x_i)$来说,由于它仅定义于网格点$x_0<x_1<\cdots<x_n$上,故其总变差即为对应于网格点的变差,即

$$TV(u(\cdot))=\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})| \tag{3-90}$$

现讨论

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial f(u(t,x))}{\partial x}=0 \tag{3-91a}$$

$$u(0,x)=u^0(x) \tag{3-91b}$$

的初值问题。若用时间推进法近似求解,可得到不同时间步$t_n=\tau\cdot n=n\cdot\Delta t$上的一系列网格解$u_h^n(x_i)=u_h(t_n,x_i)$,$n=0,1,2,\cdots$;$h=\Delta x$为空间网格步长。其相应的总变差$TV(u_h^n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}|u_h^n(x_i)-u_h^n(x_{i-1})|$。对于任意$n$,若均有$TV(u_h^n)\leqslant C\cdot TV(u_h^0)$,且$C$为与$h$无关的一个常数,则称所得之近似解是总变差有界的;若$TV(u_h^{n+1})\leqslant TV(u_h^n)$,则称是总变差趋于零的(或称总变差减小或不增的),因此,总变差减小的算法是总变差有界的算法。且此时C=1。从数学上可以证明,总变差有界是算法格式收敛的充分条件。

二、单调格式、保单调格式和 TVD 性质的充分条件

求解(3-91)的$2k+1$点守恒型格式的一般形式可写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda[\bar{f}(u_{j-k+1}^n,\cdots,u_{j+k}^n)-\bar{f}(u_{j-k}^n,\cdots,u_{j+k-1}^n)]=H(u_{j-k}^n,u_{j-k+1}^n,\cdots,u_{j-k}^n) \tag{3-92}$$

且要求数值通量$\bar{f}(u_{j-k-1}^n,\cdots,u_{j+k}^n)$、$\bar{f}(u_{j-k}^n,\cdots u_{j-k-1}^n)$与方程中通量项$f(u)$是相容的。即$\bar{f}(u,\cdots,u)=f(u)$。若$u_j^{n+1}$作为$2k+1$个自变量$u_{j-k}^n,\cdots,u_{j+k}^n$的函数对每个自变量都是单调的,即任一自变量增加时$u_j^{n+1}$至少是不减的,或

$$\frac{\partial H}{\partial u_{j-l}^n}\geqslant 0,l=-k,\cdots,k \tag{3-93}$$

则称此格式是单调格式(*Monotone Scheme*)。

若上述格式的u_j^n是网格h的单调函数,即$I_L\leqslant i\leqslant I_R$时,有$u_i^n\leqslant u_{i+1}^n$;$u_j^{n+1}$也是网格$k$的单调函数,且若$I_{L+k}\leqslant j\leqslant I_{R-k}$时,有$u_j^{n+1}\leqslant u_{j+1}^{n+1}$,则称该格式为保单调格式(Monotonicity Preserving Scheme)。可见在定义保单调差分格式时,只涉及在$n+1$时间层上的量与n时间层上的量之间的关系并不直接涉及格式本身的结构;而在定义单调差分格式时涉及到了格式的结构,即要求满足式(3-93)。在一般情况下,单调格式一定是保单调的。但保单调格式不一定是单调格式。

Godunov 证明了线性差分格式

$$u_j^{n+1}=\sum a_k u_{j+k}^n \tag{3-94}$$

为单调差分格式的充要条件是所有 $a_k \geqslant 0$，且对线性情况保单调格式也是单调格式。他并证明了常系数单调差分格式的截断误差是一阶的。Jenning 将单调差分格式的概念推广到非线性差分格式并给出了式(3-93)的定义。Harten，Hyman 和 Lax 进一步证明了非线性单调差分格式的截断误差也只能是一阶的。

Harten 证明了下述结论〔31〕：

(1) 任何单调格式都是 TVD 格式；

(2) 任何 TVD 格式都是保单调格式。

由于任何线性的保单调格式必为单调格式，而单调格式只有一阶精度，因此高精度的 TVD 格式就只能是非线性的保单调格式。

对于常用的 3 点($k=1$)和 5 点($k=2$)显式格式，Harten 还给出了验证计算格式具有 TVD 性质的充分条件，即若

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda[\bar{f}(u_{j-1}^n, \cdots, u_{j+2}^n)] - \bar{f}(u_{j-2}^n, \cdots, u_{j+1}^n)] \text{ 可写作}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^{-}\Delta_{j+1/2}u^n - C_{j-1/2}^{-}\Delta_{j-1/2}u^n \tag{3-95a}$$

其中

$$\Delta_{j+1/2}u = u_{j+1}^n - u_j^n, \qquad \Delta_{j-1/2}u = u_j^n - u_{j-1}^n, \qquad \lambda = \Delta t/\Delta x$$

$$C_{j+1/2}^{\mp} = C_{j+1/2}^{+}(u_{j-1}^n, \cdots, u_{j-2}^n), \qquad C_{j-1/2} = C_{j-1/2}^{-}(u_{j-2}^n, \cdots, u_{j+1}^n)$$

则当 $\quad C_{j-1/2}^{+},\quad C_{j+1/2}^{-} \geqslant 0,\quad C_{j+1/2}^{+} + C_{j+1/2}^{-} \leqslant 1$ 时，格式为 TVD 格式。(3-95b)

证明如下：由(3-95a)可知

$$|\Delta_{j+1/2}u^{n+1}| = |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n-1}| = |\Delta_{j+1/2}u^n(1 - C_{j+1/2}^{-} - C_{j+1/2}^{+}) + C_{j+3/2}^{+}\Delta_{j+3/2}u^n + C_{j-1/2}^{-}\Delta_{j-1/2}u^n|$$

根据式(3-95b)，上式各系数均为正，故

$$|\Delta_{j+1/2}u^{n+1}| \leqslant (1 - C_{j-1/2}^{-} - C_{j+1/2}^{+})|\Delta_{j+1/2}u^n| + C_{j-1/2}^{-}|\Delta_{j-1/2}u^n| + C_{j+3/2}^{+}|\Delta_{j+3/2}u^n|$$

对上式求和，可得

$$TV(u^{n+1}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}|\Delta_{j+1/2}u^{n+1}| < \sum_{j=-\infty}^{\infty}(1 - C_{j+1/2}^{-} - C_{j-1/2}^{-})|\Delta_{j+1/2}u^n| + \sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{j+3/2}^{+}|\Delta_{j-3/2}u^n| + \sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{j-1/2}^{-}|\Delta_{j-1/2}u^n| = \sum_{j=-\infty}^{\infty}|\Delta_{j-1/2}u^n| = TV(u^n)$$

对于 $2k+1(k>2)$ 个点的 TVD 格式的判据可见文献[34]。

Harten 进一步还讨论了单参数族五点格式的 TVD 性质。单参数族的五点格式可写作：

$$u_j^{n+1} + \lambda\theta(\bar{f}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{f}_{j-1/2}^{n+1}) = u_j^n - \lambda(1-\theta)(\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n) \tag{3-96}$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$，$\bar{f}_{j+1/2}^n = \bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n, u_{j+2}^n)$ 和 $\bar{f}_{j+1/2}^{n+1} = \bar{f}(u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n-1}, u_{j+1}^{n+1}, u_{j+2}^{n+1})$。当 $\theta=0$ 时，上式为显式格式，$\theta \neq 0$ 时是隐式格式，$\theta = \frac{1}{2}$ 时是时间中值的隐式格式和 $\theta=1$ 时是欧拉后差全隐格式。

Harten 在文献〔36〕中给出格式(3-96)是 TVD 的充分条件。即若(3-96)格式中通量 $\bar{f}$ 是 Lipschitz 连续的，且式(3-96)可改写成

$$u_j^{n+1} - \lambda\theta(\tilde{C}_{j+1/2}^{-}\Delta_{j+1/2}u - \tilde{C}_{j-1/2}^{+}\Delta_{j-1/2}u)^{n+1} = u_j^n + \lambda(1-\theta)(\tilde{C}_{j+1/2}^{-}\Delta_{j+1/2}u - \tilde{C}_{j-1/2}^{+}\Delta_{j-1/2}u)^n \tag{3-96a}$$

其中 $\tilde{C}_{j\pm1/2}^{\mp} = \tilde{C}^{\mp}(u_j, u_{j\pm1}, u_{j\pm2})$，或可能 $\tilde{C}_{j\pm1/2}^{\mp} = \tilde{C}^{\mp}(u_{j\mp1}, u_j, u_{j+1}, u_{j\pm2})$是有界的。Harten 证明了：若对所有 j 点，

$$C^{+}_{j+1/2} = \lambda(1-\theta)\tilde{C}^{+}_{j+1/2} \geqslant 0, \qquad C^{-}_{j+1/2} + C^{-}_{j+1/2} = \lambda(1-\theta)(\tilde{C}^{+}_{j-1/2} + \tilde{C}^{-}_{j+1/2}) \leqslant 1$$

和对所有 j 点，$-\infty < C \leqslant -\lambda\theta\tilde{C}^{-}_{j-1/2} \leqslant 0$ (3-96b)

条件成立，则格式(3-96a)是 TVD 的。式中 C 为某一定的有限值。

为简化表示将式(3-96)改写成

$$L \cdot u^{n+1} = R \cdot u^{n} \tag{3-97a}$$

其中算子

$$(L \cdot u)_j = u_j + \lambda\theta(\overline{f}_{j+1/2} - \overline{f}_{j-1/2}) \tag{3-97b}$$

$$(R \cdot u)_j = u_j - \lambda(1-\theta)(\overline{f}_{j+1/2} - \overline{f}_{j-1/2}) \tag{3-97c}$$

格式(3-96)是 TVD 的充分条件是

$$TV(R \cdot u^{n}) \leqslant TV(u^{n}), TV(L \cdot u^{n+1}) \geqslant TV(u^{n+1}) \tag{3-98}$$

而使式(3-98)得以成立的充分条件是 CFL 型的限制条件[35]

$$|\lambda a_{j+1/2}| \leqslant \lambda Q(a_{j+1/2}) \leqslant \frac{1}{1-\theta} \tag{3-99}$$

其中 $a_{j+1/2} = \begin{cases} (f_{j+1} - f_j)/\Delta_{j+\frac{1}{2}}u & \Delta_{j+1/2}u \neq 0 \\ a(u_j) & \Delta_{j+1/2}u = 0 \end{cases}$

$Q(a_{j+1/2})$ 是数值通量 $\overline{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - Q(a_{j+1/2})\Delta_{j+1/2}u]$ 中的“数值粘性系数”。关于式(3-98)和式(3-99)的具体证明可见文献[36]。

可见当 $\theta=1$，为 Euler 完全隐式时，式(3-96)是无条件的 TVD；$\theta=\frac{1}{2}$ 时，要使(3-96)是 TVD 的，其 CFL 型限制数为 2；$\theta=0$，Euler 显式时，其 CFL 型限制数为 1。满足这些条件的格式(3-96)分别是一阶精度的显式($\theta=0$)TVD 和一阶精度的隐式($\theta=1$)TVD 格式。

三、显式一阶 TVD 格式举例

为简单起见，仅以显式为例讨论之。式(3-91a)三点显式守恒型差分格式可具体地写作，

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\overline{f}^n_{j+1/2} - \overline{f}^n_{j-1/2}) \tag{3-100}$$

其中

$$\overline{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - Q(a_{j+1/2})\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-100a}$$

$$Q_{j+1/2} = \begin{cases} (f_{j+1} - f_j)/\Delta_{j+1/2}u & \Delta_{j+1/2}u \neq 0 \\ a(u_j) & \Delta_{j+1/2} = 0 \end{cases} \tag{3-100b}$$

Q 是 λ 和 a 的函数

其中三个经典的数值通量的具体形式为：

1. Lax-Wendroff 格式的通量形式

$$\overline{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - \lambda(a_{j+1/2})^2\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-101}$$

故 $Q(a_{j+1/2}) = \lambda(a_{j+1/2})^2$

2. Lax-Friedrichs 格式的通量形式

$$\overline{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - \frac{1}{\lambda}\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-102}$$

故 $Q(a_{j+1/2}) = 1/\lambda$

3. GCIR(Generalization of the Courant-Isaacson-Rees)格式的通量形式

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - |a_{j+1/2}|\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-103}$$

故 $Q(a_{j+1/2}) = |a_{j+1/2}|$

(3-95b)具有 TVD 性质的充分条件可具体写作：

$$\lambda C^-_{j+1/2} = \frac{\lambda}{2}[-a_{j+1/2} + Q(a_{j+1/2})] \geqslant 0 \tag{3-104a}$$

$$\lambda C^+_{j+1/2} = \frac{\lambda}{2}[a_{j+1/2} + Q(a_{j+1/2})] \geqslant 0 \tag{3-104b}$$

$$\lambda(C^-_{j+1/2} + C^+_{j+1/2}) = \lambda Q(a_{j+\frac{1}{2}}) \leqslant 1 \tag{3-104c}$$

将这些条件分别应用于上述三种格式，可知 L-W 格式不是 TVD 格式，而另两种格式是 TVD 格式，其中 L-F 格式满足熵不等式，而 GCIR 不满足熵不等式[37]。可见 TVD 格式与单调格式不一样，并不自动与熵不等式相容。然而不满足熵不等式的差分格式可能导致差分解收敛于非物理解。因此在构造 TVD 格式时必须同时保证熵不等式的满足，即对 TVD 格式显式添加某些限制以保证实现物理解。Harten 在文献[31]中给出了一种修正 TVD 格式使其与熵不等式相容的方法：对于三点格式，为满足 TVD 格式，可选择 $Q(z)=|z|$，这样可得到最小耗散的 TVD 格式。但这种选择在 $z=0$ 时会使三点格式中的数值粘性系数等于零而不满足熵不等式，为此，可在 $z=0$ 处对 $Q(z)$ 修正，使

$$Q(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{z^2}{\delta} + \delta) & |z| < \delta \\ |z| & |z| \geqslant \delta \end{cases} \tag{3-105}$$

数值实验表明，δ 越大，越能保证满足熵不等式，但却越降低解的分辨率；取 $\delta=0.025$，0.05 和 0.125 既能保证满足熵不等式，又可获得高分辨率的解。图 3-48 给出了 $Q(z)$ 的曲线。

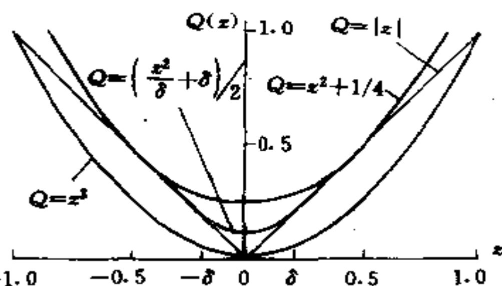


图 3-48　$Q(z)$的曲线

四、高阶 TVD 格式的构造

为简单起见，仍以线性方程

$$u_t + au_x = 0, \quad u(0,x) = u^0(x) \tag{3-106}$$

为例讨论格式的形式

（一）反扩散方法

解方程(3-106)的迎风格式为：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda[\frac{1}{2}(a + |a|)(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}(a - |a|)(u_{j+1}^n - u_j^n)] \tag{3-107}$$

若令 $C^+_{j+1/2} = -\frac{\lambda}{2}(a-|a|)$，$C^-_{j-1/2} = \frac{\lambda}{2}(a+|a|)$，且取 $\lambda|a|\leqslant 1$，显然

$$C^+_{j+1/2}, C^-_{j+1/2} \geqslant 0, 和\ C^+_{j+1/2} + C^-_{j+1/2} = \lambda|a| \leqslant 1$$

故迎风格式(3-107)是满足 TVD 性质的，但只有一阶精度，其人工粘性较大。

解方程(3-106)的 Lax-Wendroff 格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\gamma(\Delta u^n_{j+1/2} + \Delta u^n_{j-1/2}) + \frac{1}{2}\gamma^2(\Delta u^n_{j+1/2} - \Delta u^n_{j-1/2}) \tag{3-108}$$

其中 $\gamma=a\frac{\Delta t}{x}$。这一格式是二阶精度的，但不难证明，当 $|\gamma|<1$ 时，它不具有 TVD 性质。将 Lax-Wendroff 格式改写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{2}(\gamma+|\gamma|)\Delta u_{j-1/2}^n-\frac{1}{2}(\gamma-|\gamma|)\Delta u_{j+1/2}^n-$$

$$\frac{1}{2}(1-|\gamma|)|\gamma|[\Delta u_{j+1/2}^n-\Delta u_{j-1/2}^n] \tag{3-109}$$

将其与式(3-107)相比较可见，它就是迎风格式再加上方程的最后一项。当 $|\gamma|<1$ 时，该项恰好是负的二阶粘性项，可以认为该项抵消了一部分迎风格式过大的人工粘性，故该项被称为"反扩散项"。上述分析的启示是，取二者的折衷可能使格式既具有 TVD 性质，又有二阶精度。为此，改写式(3-109)为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{2}(\gamma+|\gamma|)\Delta u_{j-1/2}^n-\frac{1}{2}(\gamma-|\gamma|)\Delta u_{j+1/2}^n-$$

$$\frac{1}{2}(1-|\gamma|)|\gamma|[\varphi(r_{j+1/2}^+,r_{j+1/2}^-)\Delta u_{j+1/2}^n-\varphi(r_{j-1/2}^+,r_{j-1/2}^-)\Delta u_{j-1/2}^n] \tag{3-110}$$

其中差分比 $r_{j-1/2}^-=\frac{\Delta u_{j-3/2}^n}{\Delta u_{j+1/2}^n}$，$r_{j-1/2}=\frac{\Delta u_{j-1/2}^n}{\Delta u_{j+1/2}^n}$，$\varphi$ 是 r^+ 和 r^- 的函数，称为限制器(Limiter)，随差分比而变，且满足

$$0\leqslant\varphi(r^+,r^-)\leqslant 1 \tag{3-111}$$

当 $\varphi=0$ 时，式(3-110)即为迎风格式，$\varphi=1$ 时，即为 L-W 格式。

现讨论为使格式(3-110)具有 TVD 性质 φ 应满足的条件。为讨论简单又不失一般性，设式(3-106)中的 $a>0$，因而 $\gamma>0$。

改写式(3-110)为

$$u_j^{n+1}=u_j^n+C_{j+1/2}^+\Delta u_{j+1/2}^n-C_{j-1/2}^-\Delta u_{j-1/2}^n \tag{3-112}$$

其中 $C_{j-1/2}^+=0$，

$$C_{j-1/2}^-=\gamma+\frac{1}{2}(1-\gamma)\gamma[\varphi(r_{j-1/2}^+,r_{j-1/2}^-)/r_{j-1/2}^--\varphi(r_{j-1/2}^+,r_{j-1/2}^-)]$$

这样，要使条件(3-95b)成立，必须满足

$$0\leqslant\gamma\{1+\frac{1}{2}(1-\gamma)[\varphi(r_j^+,r_j^-)/r_j^--\varphi(r_{j-1}^+,r_{j-1}^-)]\}\leqslant 1$$

为使表达简单，令 $\varphi(r_j^+,r_j^-)/r_j^--\varphi(r_{j-1},r_{j-1}^-)=\Phi$，则上式可写为

$$0\leqslant\gamma\{1+\frac{1}{2}(1-\gamma)\Phi\}\leqslant 1,\qquad 当\ |\varphi(r_j^-,r_j^-)/r_j^--\varphi(r_{j-1}^+,r_{j-1}^-)|=|\Phi|\leqslant 2$$

或

$$0\leqslant\varphi(r^+,r^-)/r^-\leqslant 2,\quad 0\leqslant\varphi(r^+,r^-)\leqslant 2 \tag{3-113}$$

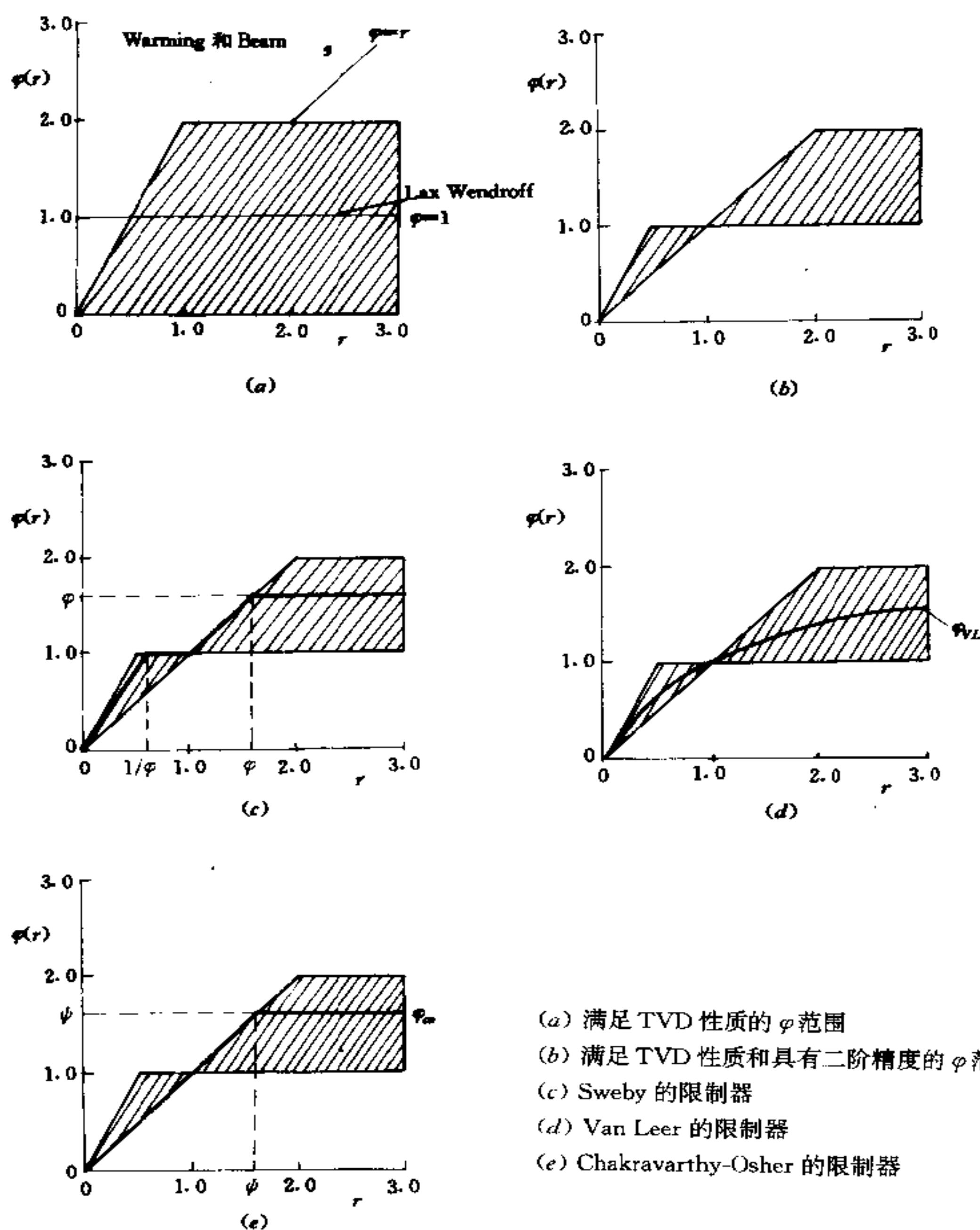
故不等式(3-113)是使格式(3-110)具有 TVD 性质的充分条件。图 3-49a 中的阴影区即保证格式具有 TVD 性质的 φ 值范围。

为使格式具有二阶精度，还需对 φ 作进一步的限制。用网格点($u_{j-2},u_{j-1},u_j,u_{j+1}$)可以构造 L-W 格式和 W-B 格式加权平均的二阶精度差分格式[38]，其函数 φ 可表示为：

$$\varphi(r)=[1-\theta(r)]\varphi^{LW}(r)+\theta(r)\varphi^{WB}(r)$$

将 L-W 格式的 $\varphi=1$ 和 W-B 格式的 $\varphi=r$ 代入上式可得

$$\varphi(r)=1-\theta(r)+r\theta(r)=1+\theta(r)(r-1) \tag{3-114}$$



(a) 满足 TVD 性质的 φ 范围
(b) 满足 TVD 性质和具有二阶精度的 φ 范围
(c) Sweby 的限制器
(d) Van Leer 的限制器
(e) Chakravarthy-Osher 的限制器

图 3-49　限制器 $\varphi(r)$ 的图形

其中 $0\leqslant\theta(r)\leqslant1$（此处选用了内插），因此具有二阶精度的 TVD 格式其 φ 的变化范围如图 3-49b 所示。Sweby 将此范围表达成

$$\varphi(r)=\max(0,\min(\Phi r,1),\min(r,\Phi)),\quad 1\leqslant\Phi\leqslant2 \tag{3-115}$$

下面以 Van Leer 的 limiter 为例讨论之

将文献[39]中 Van Leer 提出的计算格式应用于方程(3-106)，若 $a>0$ 可得：

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\gamma\Delta u_{j-1/2}-\frac{\gamma}{4}(1-\gamma)(\Delta u_{j+1/2}-\Delta u_{j-3/2})+\frac{\gamma}{4}(1-\gamma)\{s(\frac{1}{r_{j+1/2}^-})(\Delta u_{j+1/2}^n$$

$$-\Delta u_{j-1/2}^n)-s(\frac{1}{r_{j-1/2}^-})(\Delta u_{j-1/2}^n-\Delta u_{j-3/2}^n)\} \tag{3-116}$$

其中 $s(\theta)=\frac{|\theta|-1}{|\theta|+1}$。将式(3-116)改写成式(3-110)的形式，这时

$$\varphi_{VL}(r^-)=\frac{|r^-|+r^-}{1+|r^-|}=\begin{cases}0 & r^-\leqslant 0\\ \frac{2r^-}{1+r^-} & r^->0\end{cases} \tag{3-117}$$

是单调增函数且具有对称特性

$$\varphi_{VL}(r)/r=\varphi_{VL}(1/r) \tag{3-118}$$

图 3-49d 给出 φ_{VL}的曲线，可见它是位于二阶 TVD 范围之内的。

（二）数值脉动法——Roe-Sweby 二阶 TVD 格式

Roe 和 Sweby 采用数值脉动(numerical fluctuation)方法构成二阶 TVD 格式[38]，即在一阶迎风格式的基础上附加一"增量"以达到二阶精度，因此这是 L-W 格式的一种变异。附加的"增量"也是一种保证 TVD 性质的反扩散项，不过是以限制器函数形式出现的。将此格式用于方程(3-106)，若 $a>0$ 可得：

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\gamma\Delta u_{j-1/2}^n+\frac{\gamma}{2}(1-\gamma)\min\bmod(\Delta u_{j-1/2}^n,\Delta u_{j-3/2}^n)-\frac{\gamma}{2}(1-\gamma)\min\bmod(\Delta_{j-1/2}^n,\Delta_{j-1/2}^n) \tag{3-119}$$

其中

$$\min\bmod(x,y)=\mathrm{sgn}(x)\cdot\max\{0,\min[|x|,y\mathrm{sgn}(x)]\} \tag{3-120}$$

将式(3-119)改写成式(3-110)的形式，相应的限制器为

$$\varphi_R(r^-)=\max(0,\min(r^-,1))=\min\bmod(r^-,1) \tag{3-121}$$

显然 $\varphi_R(r^-)$满足 $0\leqslant\varphi_R(r^-)\leqslant 1$，及$\frac{\varphi_R}{r^-}=\begin{cases}0 & r^-<0\\ 1 & 0<r^-<1\\ 1/r^- & r^->1\end{cases}$。因此也满足条件(3-113)，从而格式是具有 TVD 性质的。从图 3-49b 可见，$\varphi_R(r^-)$是二阶 TVD 区域的下界。

Roe 随后又提出了另一种耗散性更小的限制器[40]，称为"superbee"：

$$\varphi_b(r^-)=\max(0,\min(2r,1),\min(r,2)) \tag{3-122}$$

它对应于图 3-49b 中二阶 TVD 区域的上界。

（三）通量修正法——Harten 格式

设计高分辨率 TVD 格式的依据是如下两个事实：

(1) 方程(3-91)的准确解沿特征线是常值，因而具有 TVD 性质。与其中通量项的具体形式无关；

(2) 只要满足条件(3-99)或(3-95b)，则格式(3-96)或(3-95a)就是一阶准确的 TVD 格式，与通量的具体形式无关。

因此可以通过对通量进行修正，与反扩散类似，抵消由一阶迎风格式产生的过大耗散项而获得二阶精度。

(3-95a)一阶精度 TVD 格式的改型方程为

$$u_t + f_x = \Delta x \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(a) \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{3-123}$$

稳定条件要求 $\sigma(a) \geqslant 0$，因此上式右端是一粘性项。由式(3-123)可知，一阶精度的格式能以二阶精度逼近于它，虽然只能以一阶精度逼近于(3-91)方程。

若将方程(3-91)中的通量项 f 以修正通量$(f+g)$替代，

$$g = \Delta x \sigma(a) \frac{\partial u}{\partial x} + O((\Delta x)^2) \tag{3-124}$$

再对方程(3-91)用一阶精度格式离散，这时由于消去了人工粘性项而可获得二阶精度。g 被称为"反扩散"通量。这就是"人工压缩"概念[41,42]。Harten 利用这一概念[31]将一阶 TVD 格式(3-95a)用于修正通量 $f+g$，并假定讨论 Euler 隐式($\theta=1$)格式，则

$$u_j^{n+1} + \lambda(\tilde{f}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{f}_{j-1/2}^{n+1}) = u_j^n \tag{3-125a}$$

$$\tilde{f}_{j+1/2}^H = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} + g_j + g_{j+1} - Q(a_{j+\frac{1}{2}} + r_{j+\frac{1}{2}})\Delta_{j+\frac{1}{2}}u] \tag{3-125b}$$

其中

$$r_{j+1/2} = \begin{cases} (g_{j+1} - g_j)/\Delta_{j+1/2}u & \Delta_{j+1/2}u \neq 0 \\ 0 & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u = 0 \end{cases} \tag{3-125c}$$

对通量 g 的要求是：①函数 g 必须具有有界的 r，使(3-125a)相对于修正通量$(f+g)$是 TVD 的；②除在极值点外，格式应有二阶精度。Harten 具体提出的

$$g_j = \min\bmod(\sigma_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}u, \sigma_{j-\frac{1}{2}}\Delta_{j-1/2}u) \tag{3-125d}$$

$$\sigma_{j+1/2} = \sigma(a_{j+1/2}), \quad 对定态解选用\ \sigma(z) = \frac{1}{2}Q(z) \geqslant 0 \tag{3-125e}$$

对于非定态计算

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}(Q(z) + \lambda z^2) \geqslant 0 \tag{3-125f}$$

Harten 还证明了他所提出的 g 具有如下性质：

$$g_j = g(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \quad g(u,u,u) = 0 \tag{3-126a}$$

$$|r_{j+1/2}| = |g_{j+1} - g_j|/|u_{j+1} - u_j| \leqslant \sigma(a_{j+1/2}) \tag{3-126b}$$

$$g = \Delta x \sigma(a) \frac{\partial u}{\partial x} + O((\Delta x)^2) \tag{3-126c}$$

式(3-126a)表明修正通量与 $f(u)$ 是相容的；式(3-126b)表明由 g 产生的平均特征速度 $r_{j+1/2}$ 是均匀有界的；式(3-126c)则表明了式(3-125b)是空间二阶精度的。关于其他更复杂的 g_j 形式可见文献[36]。

在极值点处

$$u_{j-1} \leqslant u_j = u_{j+1} \geqslant u_{j+2} \tag{3-127}$$

由于 $g_j = g_{j+1} = 0$，数值通量式(3-125b)蜕化为原来的一阶精度格式。二阶精度的 TVD 格式都有在极值点处自动蜕化为一阶精度的机制，故二阶 TVD 格式是非线性的(即使对常系数方程也如此)。

上述(3-125a)虽只对应于(3-96)的 $\theta=1$ 时情况，其实只要在式(3-125f)中改用

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}Q(z) + \lambda(\theta - \frac{1}{2})z^2 \tag{3-125g}$$

即可适用于式(3-96)的一般情况。

（四）MUSCL 方法

Van Leer 在文献〔13〕中提出了可获得空间高阶精度格式的 MUSCL（Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws）方法。即以 $u^R_{j+1/2}$和 $u^L_{j+1/2}$分别替代 u_{j+1}和 u_j 而将一阶精度的三点显式格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda[\bar{f}^n_{j+1/2} - \bar{f}^n_{j-1/2}] \tag{3-100}$$

其中

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1} - |a_{j+\frac{1}{2}}|\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-103}$$

提高为高阶精度的数值方法。即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda[\bar{f}(u^R_{j+1/2}, u^L_{j+1/2}) - \bar{f}(u^R_{j-1/2}, u^L_{j-1/2})]^n \tag{3-128}$$

和

$$\bar{f}^{VL}_{j+1/2} = \bar{f}(u^R_{j+1/2}, u^L_{j+1/2}) = \frac{1}{2}[f(u^R_{j+1/2}) + f(u^L_{j+1/2}) - \left|\frac{f(u^R_{j+1/2}) - f(u^L_{j+1/2})}{(u^R_{j+1/2} - u^L_{j+1/2})}\right|(u^R_{j+1/2} - u^L_{j+1/2})] \tag{3-129}$$

其中

$$u^R_{j+1/2} = u_{j+1} - \frac{1}{4}[(1-k)\Delta_{j+3/2}u + (1+k)\Delta_{j+1/2}u]$$

$$u^L_{j+1/2} = u_j + \frac{1}{4}[(1-k)\Delta_{j-1/2}u + (1+k)\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-130}$$

当$k=-1$ 时为完全迎风格式，$k=0$ 为 Fromme 格式。

$k=1/3$ 为三阶迎风偏置格式，$k=1$ 三点中心差分格式。

采用限制器可消除可能出现的振荡，例如采用 min mod 限制器，就可将迎风偏置的插值变为：

$$u^R_{j+1/2} = u_{j+1} - \frac{1}{4}[(1-k)\tilde{\Delta}_{j+3/2}u + (1+k)\tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2}u] \tag{3-131a}$$

$$u^L_{j-1/2} = u_j + \frac{1}{4}[(1-k)\tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2}u + (1+k)\tilde{\Delta}_{j+1/2}u] \tag{3-131b}$$

其中

$$\tilde{\Delta}_{j+1/2} = \min\bmod(\Delta_{j+1/2}u, w\Delta_{j-1/2}u) \tag{3-131c}$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} = \min\bmod(\Delta_{j+1/2}u, w\Delta_{j+3/2}u) \tag{3-131d}$$

$$\min\bmod(x, wy) = \mathrm{sgn}\,(x)\cdot\max\{0, \min[|x|, wy\,\mathrm{sgn}(x)]\} \tag{3-131e}$$

$$1 \leqslant w \leqslant \frac{3-k}{1-k}, k \neq 1 \tag{3-131f}$$

（五）Osher 和 Chakravarthy TVD 格式〔43〕

单参数族半离散格式中的数值通量为

$$\bar{f}_{j+1/2} = f_{j+1/2} - \frac{(1-k)}{4}(\Delta_{j+3/2}f^-) - \frac{(1+k)}{4}(\Delta_{j+1/2}f^-) + \frac{(1+k)}{4}(\Delta_{j+1/2}f^+) + \frac{(1-k)}{4}(\Delta_{j-1/2}f^+) \tag{3-132}$$

其中 $f_{j+1/2}=f(u_j,u_{j+1})$为某种一阶迎风数值通量，可为 Engquist 和 Osher 或 Roe 的迎风数值通量。k 的意义如式(3-130)中所示。括号中的上标“＋”和“－”分别表示波速为正和负。为获得高阶 TVD 格式，Osher 和 Chakravarthy 在式(3-132)右端项的后四项中对通量使用限制器，即

$$\overline{f}^{OC}_{j+1/2}=f^{j+1/2}-\frac{1-k}{4}(\tilde{\Delta}_{j+3/2}f^{-})-\frac{1+k}{4}(\Delta_{j+1/2}f^{-})+$$

$$\frac{1+k}{4}(\tilde{\Delta}_{j+1/2}f^{+})+\frac{1-k}{4}(\Delta_{j-1/2}f^{+}) \tag{3-133a}$$

其中

$$\tilde{\Delta}_{j-3/2}f^{-}=\min\bmod[\Delta_{j+3/2}f^{-},w\Delta_{j-1/2}f^{-}] \tag{3-133b}$$

$$\Delta_{j+1/2}f^{-}=\min\bmod[\Delta_{j+1/2}f^{-},w\Delta_{j+3/2}f^{-}] \tag{3-133c}$$

$$\tilde{\Delta}_{j+1/2}f^{+}=\min\bmod[\Delta_{j+1/2}f^{+},w\Delta_{j-1/2}f^{+}] \tag{3-133d}$$

$$\Delta_{j-1/2}f^{+}=\min\bmod[\Delta_{j-1/2}f^{+},w\Delta_{j+1/2}f^{+}] \tag{3-133e}$$

$$1\leqslant w\leqslant\frac{3-k}{1-k}\qquad k\neq 1 \tag{3-133f}$$

Yee 对式(3-125),式(3-124)和式(3-133)三种数值通量的计算量作了比较[44],表明 Harten 和 Van Leer 的计算量是相当的,OC 的计算量较它们多 2/5 左右,或更确切地,$k=-1$ 时多 20～25% 左右,$k\neq-1$ 时多 40～45%左右。Yee 还指出,当使用 Euler 显式时,只有 Harten 方法对时间有二阶精度,其他两种方法都是一阶精度。若后两种方法也要对时间有二阶精度,就需附加计算工作量。

(六) 高阶对称 TVD 格式

1. 迎风 TVD 和对称 TVD 格式

上述 TVD 格式由迎风格式加带限制器的修正项构成,称为迎风型 TVD 格式。本节讨论对称型(非迎风型)TVD 格式。这是由中心型(如 Lax-Wendroff)格式加带限制器的修正项构成的。应当说明的是,加带限制器修正项后,这两类格式都不再具有原来各自传统的迎风和对称的含义。此外,迎风型 TVD 格式的数值耗散项是迎风加权的。对称型的数值耗散项则是中心型的。这可由下述推导予以说明。

一般来说,二阶迎风型 TVD 格式也可以表示成一个中心型差分格式加以数值耗散项,但此数值耗散项的大小取决于特征速度的符号,故为迎风加权的(upwind weighted),以显式 Harten 格式为例:

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda(\overline{f}^n_{j+1/2}-\overline{f}^n_{j-1/2}) \tag{3-134a}$$

$$\overline{f}^n_{j-1/2}=\overline{f}(u^n_{j-1},u^n_j,u^n_{j\pm1},u^n_{j=2}) \tag{3-134b}$$

它的二阶显式 TVD 格式可写成:

$$\overline{f}^H_{j+1/2}=\frac{1}{2}[\overline{f}_j+\overline{f}_{j+1}-Q(\overline{a}_{j+1/2})\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-135a}$$

其中

$$\overline{f}_j=f(u_j)+g_j,\quad \overline{a}_{j+1/2}=a_{j+1/2}+r_{j+1/2} \tag{3-135b}$$

具体公式可见(三),若利用符号 $|\overline{a}_{j-1/2}|=\mathrm{sgn}(\overline{a}_{j+1/2})\overline{a}_{j+1/2}$ 和 $\overline{a}_{j-1/2}=(\overline{f}_{j+1}-\overline{f}_j)/(u_{j-1}-u_j)$,(3-134$a$)式可改写成:

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\lambda}{2}[1-\mathrm{sgn}(\overline{a}^n_{j+1/2})](\overline{f}^n_{j+1}-\overline{f}^n_j)-\frac{\lambda}{2}[1+\mathrm{sgn}(\overline{a}^n_{j-1/2})]\cdot(\overline{f}^n_j-\overline{f}^n_{j-1})$$

$$=u_j^n-\frac{\lambda}{2}(\overline{f}^n_{j+1}-\overline{f}^n_j)-\frac{\lambda}{2}\mathrm{sgn}(\overline{a}^n_{j-1/2})(\overline{f}^n_j-\overline{f}^n_{j-1})+\frac{\lambda}{2}\mathrm{sgn}(\overline{a}^n_{j+1/2})(\overline{f}^n_{j+1}-\overline{f}^n_j)$$

注意到(三)中 g_i 的选择,$\mathrm{sgn}(\overline{a}^n_{j+1/2})=\mathrm{sgn}(a^n_{j+1/2})$。上式中后两项是数值耗散项,它的大小取决于特征速度的符号。

2. 高阶对称 TVD 格式

在 Davis 和 Lax-Wendrof TVD 格式的基础上，Roe 发展了适用于更宽范围的对称格式，并给出了此类格式是 TVD 的充分条件。该格式的形式是由通常的 L-W 格式再加上守恒耗散项。对于常系数方程有：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(1+\nu)\Delta_{j-1/2}u - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\Delta_{j+1/2}u - \frac{1}{2}|\nu|(1-|\nu|)(1-Q_{j-1/2})\Delta_{j-1/2}u + \frac{1}{2}|\nu|(1-|\nu|)(1-Q_{j+1/2})\Delta_{j+1/2}u \tag{3-136}$$

方程右端前三项表示通常的 LW 格式，后两项表示附加的守恒型耗散项。函数 $Q_{j+1/2}$是梯度 $\Delta_{j-1/2}$，$\Delta_{j+1/2}$和 $\Delta_{j+3/2}$的函数，可写成：

$$Q_{j+1/2} = Q(r_{j+1/2}^{-}, r_{j-1/2}^{-}) \tag{3-137a}$$

$$r_{j-1/2}^{-} = \frac{\Delta_{j-1/2}u}{\Delta_{j+1/2}u}; \qquad r_{j-1/2}^{-} = \frac{\Delta_{j-3/2}u}{\Delta_{j+1/2}u} \tag{3-137b}$$

Roe 假定 Q 和 Q/r 始终是正的，则得出(3-136)格式是 TVD 的充分条件为：

$$Q_{j+1/2} < \frac{1}{1-|\nu|} \tag{3-138a}$$

$$(Q_{j-1/2}/r_{j+1/2}) < \frac{2}{|\nu|} \tag{3-138b}$$

$$(Q_{j-1/2}/r_{j-1/2}^{-}) < \frac{2}{|\nu|} \tag{3-138c}$$

格式(3-136)用于非定常问题的计算有很好的效果，因其对时间、空间均有二阶精度：但若用于定态解计算，特别是隐式计算，即用于式(3-96)$\theta \neq 0$ 时，则不仅有类似于显式时的时间步长限制，且定态解将依赖于时间步长，这是因为格式(3-136)的数值通量为

$$\bar{f}_{j+1/2}^{LW} = \frac{1}{2}\{a(u_{j+1}+u_j) - [\lambda a^2 Q_{j+1/2} + |a|(1-Q_{j+1/2})]\Delta_{j+1/2}u\} \tag{3-139}$$

其中 $\lambda a Q_{j+1/2}$项引起上述不理想的特性。

Yee[45]令(3-139)式中的 $\lambda a^2 Q_{j+1/2}$项等于 0 而将 Roe 格式推广适用于隐式计算，形成 Yee-Roe-Davis 的对称 TVD 格式。这时数值通量为：

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[a(u_{j+1}+u_j) - |a|(1-Q_{j-1/2})\Delta_{j+1/2}u] \tag{3-140}$$

将其用于式(3-96)时对应于式(3-96b)中的

$$\tilde{C}_{j-1/2}^{+} = a[1 - \frac{1}{2}Q_{j-1/2} + \frac{1}{2}(Q_{j+1/2}/r_{j+1/2}^{-})], \qquad a > 0 \text{ 时} \tag{3-141a}$$

$$\tilde{C}_{j+1/2}^{-} = |a|[1 - \frac{1}{2}Q_{j+1/2} + \frac{1}{2}(Q_{j-1/2}/r_{j-1/2}^{+})], \qquad a < 0 \text{ 时} \tag{3-141b}$$

对应于 TVD 的充分条件式(3-99)为：

$$0 < \lambda(1-\theta)a[1 - \frac{1}{2}Q_{j-1/2} + \frac{1}{2}(Q_{j+1/2}/r_{j+1/2}^{-})] < 1, \qquad a > 0 \tag{3-142a}$$

$$0 < \lambda(1-\theta)|a|[1 - \frac{1}{2}Q_{j+1/2} + \frac{1}{2}(Q_{j-1/2}/r_{j-1/2}^{+})] < 1, \qquad a < 0 \tag{3-142b}$$

和

$$-\infty < c < -\lambda\theta\tilde{C}^{-}_{j+1/2} \leqslant 0 \tag{3-143}$$

若 $0 \leqslant \theta \leqslant 1, \nu \neq 0$,和

$$Q_{j-1/2} - (Q_{j+1/2}/r^{-}_{j+1/2}) < 2 \tag{3-144a}$$

$$(Q_{j+1/2}/r^{-}_{j+1/2}) - Q_{j-1/2} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)a} - 2 \tag{3-144b}$$

$$\lambda a < \frac{1}{1-\theta} \tag{3-144c}$$

则条件(3-142a)是满足的。同理,若

$$Q_{j+1/2} - (Q_{j-1/2}/r^{+}_{j-1/2}) < 2 \tag{3-144d}$$

$$(Q_{j-1/2}/r^{+}_{j-1/2}) - Q_{j-1/2} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)|a|} - 2 \tag{3-144e}$$

$$\lambda|a| < \frac{1}{1-\theta} \tag{3-144f}$$

则条件(3-142b)是满足的。由于 $\lambda|a| \leqslant \frac{1}{1-\theta}$,所以 $\frac{2}{\lambda(1-\theta)|a|} - 2 > 0$,故可与 Roe 一样假定 Q 和 Q/r 始终是正的。若取

$$Q_{j+1/2} < 2 \tag{3-145a}$$

$$(Q_{j+1/2}/r^{-}_{j+1/2}) < \frac{2}{\lambda(1-\theta)|a|} - 2 \tag{3-145b}$$

$$(Q_{j+1/2}/r^{-}_{j+1/2}) < \frac{2}{\lambda(1-\theta)|a|} - 2 \tag{3-145c}$$

$$\lambda|a| < \frac{2}{3(1-\theta)} \tag{3-145d}$$

则条件(3-143)也是满足的。可见将(3-140)用于(3-96)式所构造的差分格式是 TVD 的。Yee 建议可用的限制器有:

$$Q(r^{-},r^{+}) = \min\bmod(1,r^{-}) + \min\bmod(1,r^{+}) - 1 \tag{3-146a}$$

$$Q(r^{-},r^{-}) = \min\bmod(1,r^{-},r^{+}) \tag{3-146b}$$

$$Q(r^{-},r^{+}) = \min\bmod[2,2r^{-},2r^{+},0.5(r^{-}+r^{+})] \tag{3-146c}$$

$$\begin{aligned}Q(r^{-},r^{+}) = {} & \max\{0,\min(2r^{-},1),\min(r^{-},2)\} + \\ & \max\{0,\min(2r^{+},1),\min(2r^{+},2)\} - 1\end{aligned} \tag{3-146d}$$

$$Q(r^{-},r^{+}) = \frac{r^{-}+|r^{-}|}{1+r^{-}} + \frac{r^{-}+|r^{+}|}{1+r^{-}} - 1 \tag{3-146e}$$

$$\min\bmod(1,r^{\pm}) = \begin{cases}\min(1,r^{\pm}) & r^{\pm} > 0 \\ 0 & r^{\pm} \leqslant 0\end{cases} \tag{3-146f}$$

其中(3-146d)即 Roe 的"Superbee",(3-146e)即 Van Leer 的限制器,(3-146b)和(3-146c)是满足(3-145)不等式的。这些限制器均有 $Q(1,1)=1$,故格式在光滑区具有二阶精度。

(七) 无波动、无自由参数的高分辨率格式(NND)

在中心差分格式中人工粘性系数式((3-10)中 $K^{(2)}, K^{(4)}$)需根据经验来调整,这不仅影响计算结果的可靠性,使用起来也很不方便;而上述不需要这些自由参数的高分辨率格式计算工作量均较大;为此,张涵信构造了 NND 格式[46]。其基本出发点是在 Euler 方程和 N S 方程的右端附加一三阶导数项,并使此项的系数在激波上游为正,在激波下游为负,以此来抑制差分解在激波上、下游

的非物理波动，同时保证熵增条件[47]。

为简单起见，以一维标量方程为例：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{3-147}$$

设 $f=au, a=\frac{\partial f}{\partial u}$ 并令 $f=f^{+}+f^{-}, f^{\pm}=a^{\pm}u, a^{\pm}=\frac{1}{2}(a\pm|a|)$，则式(3-147)可写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\left(\frac{\partial f^{-}}{\partial x}+\frac{\partial f^{-}}{\partial x}\right) \tag{3-148}$$

下面利用对 $\frac{\partial f^{-}}{\partial x}, \frac{\partial f^{-}}{\partial x}$ 的差分离散来产生适当的三阶导数项。记 $h=\Delta x$，为空间步长。

由 Taylor 级数展开式易知，若在点 (x_j, t_n) 处使用二阶逆风差分 $\frac{3f_j^{+n}-4f_{j-1}^{+n}+f_{j-2}^{-n}}{2h}$ 来离散 $\frac{\partial f^{+}}{\partial x}$，则误差项中三阶导数项的系数为负；若用中心差分 $\frac{f_{j+1}^{-n}-f_{j-1}^{-n}}{2h}$ 来离散 $\frac{\partial f^{-}}{\partial x}$，则误差项中三阶导数项的系数也为负。同理，用中心差分离散 $\frac{\partial f^{+}}{\partial x}$，用二阶逆风差分离散 $\frac{\partial f^{-}}{\partial x}$，则三阶导数项的系数均为正。这样，若用适当的差分表达式代入式(3-148)，即在激波上游区，取

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n=-\left[\frac{3f_j^{+n}-4f_{j-1}^{-n}+f_{j-2}^{+n}}{2h}+\frac{f_{j-1}^{-n}-f_{j-1}^{-n}}{2h}\right] \tag{3-149a}$$

在激波下游区取

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n=-\left[\frac{-3f_j^{n}+4f_{j+1}^{-n}-f_{j+2}^{-n}}{2h}+\frac{f_{j+1}^{+n}-f_{j-1}^{+n}}{2h}\right] \tag{3-149b}$$

可保证修正方程右端的三阶导数项系数在激波上游区为正，在激波下游区为负，这样，便可抑制差分解的波动。

为在计算中能自动进行激波位置的判断并据此选择相应的差分计算，可按如下方式改写离散格式(3-149)，即首先将(3-149)写为守恒格式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n=-\frac{1}{h}\left(H_{j+\frac{1}{2}}^n-H_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \tag{3-150}$$

其中

$$H_{j+\frac{1}{2}}=f_{j+\frac{1}{2},L}^{+}+f_{j-\frac{1}{2},R}^{-} \tag{3-151}$$

$$f_{j+\frac{1}{2},L}^{+}=\begin{cases} f_j^{-}+\frac{1}{2}\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{-} & \text{(上游区)} \\ f_j^{+}+\frac{1}{2}\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{+} & \text{(下游区)} \end{cases} \tag{3-152}$$

$$f_{j+\frac{1}{2},R}^{-}=\begin{cases} f_{j+1}-\frac{1}{2}\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{-} & \text{(上游区)} \\ f_{j+1}-\frac{1}{2}\Delta f_{j+\frac{3}{2}} & \text{(下游区)} \end{cases} \tag{3-153}$$

而 $\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{\pm}=f_{j+1}^{\pm}-f_j^{\pm}$

注意到在 u 单调变化的激波附近有

(1) $\Delta u_{i+\frac{1}{2}}\cdot\Delta u_{i-\frac{1}{2}}\geqslant 0$

(2) $|\Delta u_{i-\frac{1}{2}}|\leqslant|\Delta u_{i+\frac{1}{2}}|$　　(上游区)

$|\Delta u_{i-\frac{1}{2}}|\geqslant|\Delta u_{i+\frac{1}{2}}|$　　(下游区)

且精确到二阶精度，有

$$
\begin{cases}\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} = a_j^+ \cdot \Delta u_{j-\frac{1}{2}} \\ \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} = a_j^+ \cdot \Delta u_{j+\frac{1}{2}}\end{cases}, \qquad \begin{cases}\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} = a^-_{j+1} \cdot \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \\ \Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} = a^-_{j+1} \cdot \Delta u_{j+\frac{3}{2}}\end{cases}
$$

从而，式(3-152)中 $f^+_{j+\frac{1}{2},L}$ 等价于

$$
f^+_{j+\frac{1}{2},L} = f_j^+ + \frac{1}{2}\min\bmod(\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}) \tag{3-154}
$$

函数 $\min\bmod(x,y) = \begin{cases}\min(|x|,\ |y|)\cdot \mathrm{sign}x & 当\ x\cdot y>0 \\ 0 & 当\ x\cdot y\leqslant 0\end{cases}$；

类似地，式(3-153)中 $f^-_{j+\frac{1}{2},R}$ 等价于

$$
f_{j+\frac{1}{2},R} = f_{j+1} - \frac{1}{2}\min\bmod(\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}) \tag{3-155}
$$

这样，式(3-150)，式(3-151)，式(3-154)和式(3-155)就给出了能自动进行激波前后差分选择的无波动格式。显然其中不包含任何需人工调节的参数。

可以证明，此格式除在 $\Delta f^{\pm}$ 的极值附近外是空间二阶精度的。也可证明，此格式具有 TVD 性质，可以看作是一种推广的二阶 Godunov 格式〔46〕。

上述对标量方程发展的格式可以被推广用到方程组，特别是 Euler 方程上去；且若对粘性项采用通常的中心差分离散，也可用于求解 N-S 方程。

对应不同的时间推进形式，由上述格式可得到不同的显式全离散格式 NND-1 到 NND-5，并可构造出隐式时间推进无条件稳定的 NND 格式〔48〕。其中除 NND-1 格式为一阶时间精度外，其他格式对时间均为二阶精度，且 NND-2 就是 Harten 的 TVD 格式〔48〕。

NND 格式以其准确可靠，程序简单，计算量小等特点在科学研究和工程计算领域得到广泛应用并取得了良好效果。

五、对一维方程组和多维空间方程组的推广

到目前为止，数学上还只对一维函数给出总变差概念的定义，对多维变量函数 $u(t,x,y,z)$ 尚无法给出，故目前也不可能有严格的多维 TVD 格式。另一方面，虽然对一维方程组中的每个 $u_i(t,x)$ 可定义其空间变量的变差，但因方程组是非线性的，无法构造一个格式使方程组中所有函数的总变差同时都不增。因此这里讨论的推广实际上是将标量方程的 TVD 格式在形式上推广应用于一维方程组和多维空间方程组。

（一）向一维方程组的推广

本节主要介绍将非线性标量方程的差分格式推广到非线性方程组的局部特征化方法（local-characteristic approach）。这一方法的主要思想是将方程组局部"冻结"为常系数方程组，再将标量 TVD 方法应用于此常系数方程组，具体做法是首先在每一空间点上定义一组特征变量 w，并由此得到一组非耦合的标量方程。现简要讨论如下：

设有非线性方程组

$$
\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}))_x = 0, \quad \boldsymbol{u} = (u_1 \cdots u_m)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = (f_1(\boldsymbol{u}) \cdots f_m(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \tag{3-156a}
$$

或写成

$$
\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x = 0 \tag{3-156b}
$$

其中系数矩阵

$$A(u)=\begin{bmatrix} b_{11}(u) & \cdots\cdots & b_{1m}(u)\\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}(u) & \cdots\cdots & b_{mm}(u)\end{bmatrix};\qquad b_{k,l}(u)=\frac{\partial f_k(u)}{\partial u_l}\tag{3-156c}$$

若方程组为双曲型，则对任意 u，$A(u)$ 有 m 个实特征值 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，且有对应的完全右特征向量 R，满足

$$R^{-1}AR=\begin{bmatrix} a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_m\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(a^l)=\Lambda\tag{3-157}$$

定义特征变量 $w=R^{-1}u$。当(3-156b)为常系数时可得形式上互不关联的一个方程组：

$$w_t+\Lambda w_x=0;\text{即}\frac{\partial w^l}{\partial t}+a^l\frac{\partial w^l}{\partial x}=0;\quad a^l=\text{const.}\tag{3-158}$$

这样就可将前述标量方程的 TVD 格式用于其中的单个方程。

现以(3-125)格式为例具体说明之。将格式(3-125)应用于每个特征变量的方程，并令 $u_{j+1/2}=\psi(u_j,u_{j+1})$ 可为 u_j 及 u_{j+1} 的算术平均值或 Roe 平均值；$a^l_{j+1/2},R^l_{j+1/2},R^{-1l}_{j+1/2}$ 为 $A(u_{j+1/2})$ 相应的 a^l，R^l,R^{-1l}；令 $\alpha^l_{j+1/2}=w^l_{j+1}-w^l_j$，则 $\Delta_{j+1/2}u=R_{j+1/2}\alpha_{j+1/2}$，可得(3-156)的具体离散形式为：

$$u_j^{n+1}+\lambda(\tilde F^{n+1}_{j+1/2}-\tilde F^{n+1}_{j-1/2})=u_j^n$$

$$\tilde F_{j+1/2}=\frac{1}{2}(\tilde F_j+\tilde F_{j+1})+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}[g_j^l+g_{j+1}^l-Q(\alpha^l_{j+1/2}+\gamma^l_{j+1/2})\alpha^l_{j+1/2}]R^l_{j+1/2}$$

其中

$$\gamma^l_{j+1/2}=\begin{cases}(g^l_{j+1}-g^l_j)/\alpha^l_{j+1/2} & \alpha^l_{j+1/2}\neq 0\\ 0 & \alpha^l_{j+1/2}=0\end{cases}$$

$$g_j^l=\min\bmod(\sigma^l_{j+1/2}\alpha^l_{j+1/2},\sigma^l_{j-1/2}\alpha^l_{j-1/2})\qquad \sigma^l_{j+1/2}=\sigma(\alpha^l_{j+1/2})$$

局部特征化方法不仅很有效，还有如下的优点，即对各特征场可应用各自的限制器，比如对线性场采用耗散性较小的限制器，对非线性场可应用耗散性大些的限制器。

（二）对多维方程组的推广

从一维方程组向多维方程组的推广目前尚无很好的理论指导，通常的做法是对多维问题中的每一个方向正确地使用一维方程组的方法，例如对于显式方法可采用预估-修正、线化多步、时间分裂等方法，实践表明，这种方法可以取得较为满意的结果。

六、数值算例

Yee 对 NACA0012 翼型做了亚声速、跨声速与超声速的绕流计算比较[45]。对无粘计算采用了对称 TVD 方法和经典的 B-W 方法(ARC2D)，当 $Ma_\infty=1.2$ 和 1.8，$\alpha=7°$时，两种方法计算的压强分布吻合一致，但流场的细致描述不完全一样。对称 TVD 格式给出了清晰的流场结构，并在较粗的网格中仍能捕捉到激波，特别是翼型后缘的流场；而 ARC2D 给出的流场结构则较差。图 3-50 为 $Ma_\infty=1.8$ 时的等马赫线、等压线和等熵值线分布图形的比较。对于亚声速、跨声速的计算表明，TVD 格式能在 1 个～2 个网格点间捕获激波，而 ARC2D 则需占 3 个～4 个网格点，这是无粘定态解计算中 TVD 格式的最大优点，图 3-51 和 3-52 分别是采用 Harten-Yee 的迎风 TVD 格式和 Yee-Roe-Davis 的对称 TVD 格式计算 NACA0012 翼型和 RAE2322 翼型跨声速无粘定态解的结果[45]。对 NACA0012 翼型的计算条件为 $Ma_\infty=0.8$，$\alpha=1.25°$，网格数为 163×49，对 RAE2822 翼型的计算条件为 $Ma_\infty=0.75$，$\alpha=3°$，网格数为 163×64。结果表明，两种格式的计算结果吻合一

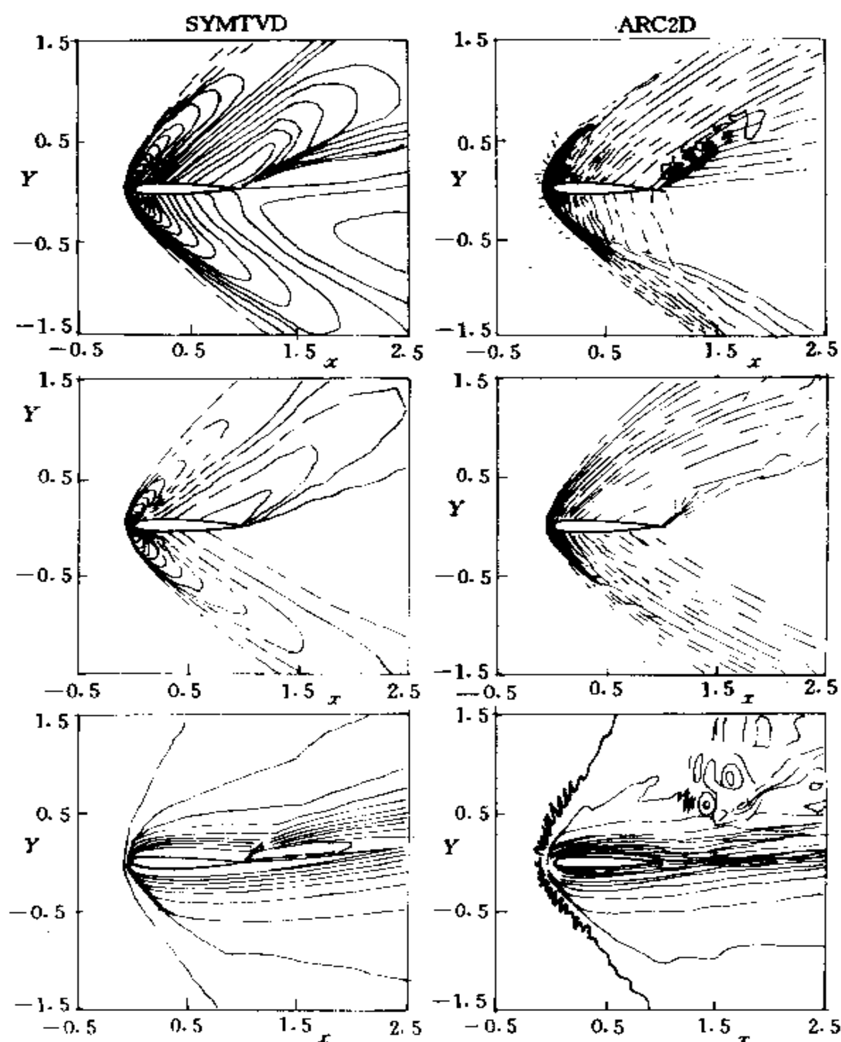


图 3-50　对称 TVD 和 BW 方法计算结果的比较 $Ma_{\infty}=1.8$

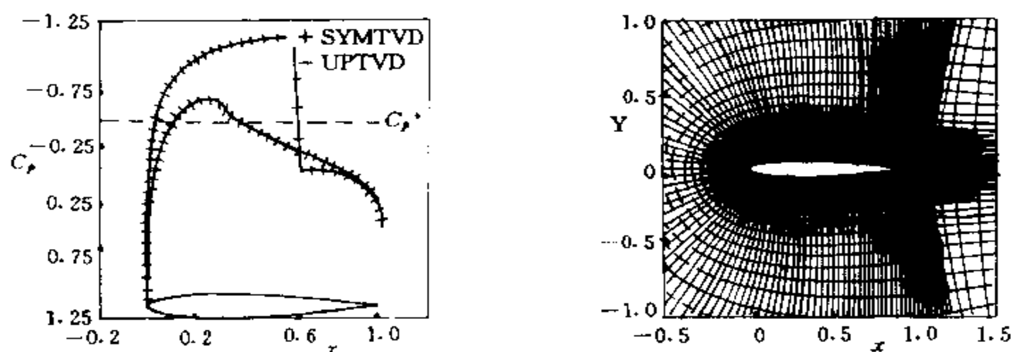


图 3-51　迎风 TVD 和对称 TVD 计算 NACA0012 定态解的比较 $Ma_{\infty}=0.8$　$\alpha=1.25°$

致。但对称 TVD 的计算工作量较迎风 TVD 的小些。图 3-53 则给出了采用这两种格式做非定常计算的结果及与实验结果的比较。这是求解一个 $Ma_{\infty}=1.5$ 的运动平面激波以 30°迎角与定态的 NACA0018 翼型相遇的流场。图中给出了在同样时间间隔内计算与实验的等密度线[49]。计算网

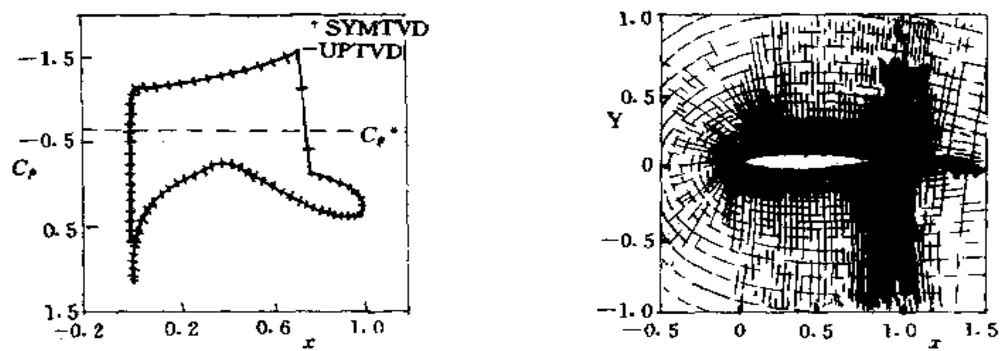


图 3-52　迎风 TVD 和对称 TVD 计算 REA2822 定态解的比较
$Ma_\infty=0.75\quad \alpha=3.06°$

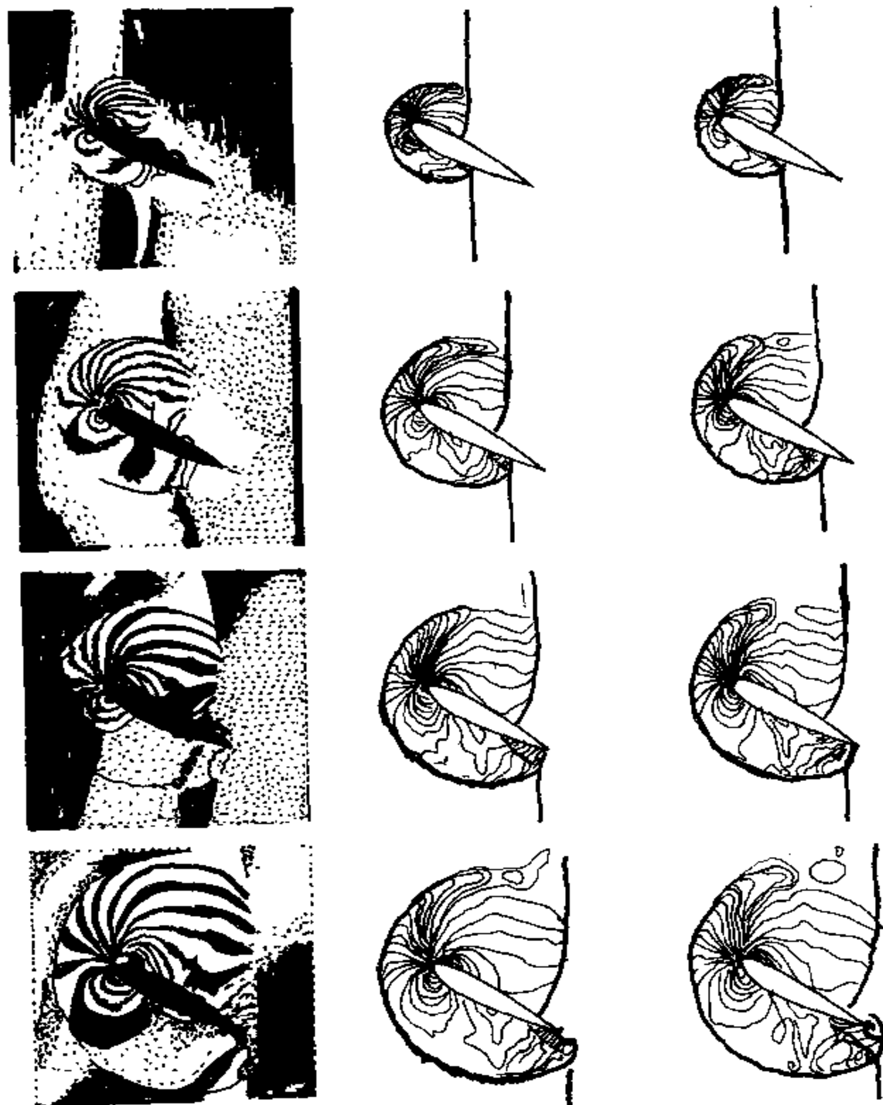


图 3-53　迎风 TVD 和对称 TVD 非定常计算和实验结果的比较 $Ma_\infty=1.5$

格为 299×79。图的左边是实验结果，中部是迎风 TVD，右边是对称 TVD 的计算结果。由图可见，数值模拟清晰地捕获了所有的间断面和前后缘处的旋涡，间断的形状和位置与实验结果很一致。两种 TVD 格式的分辨率都很高，但对称型的耗散程度略比迎风型的大些。更细致和深入的比较可见文献[50]。

Takakura 用两种 TVD 格式(Harten-Yee 和 Chakravarthy-Osher)和经典的中心型 B-W 格式对三维 ONERA M6 机翼在跨声速流动范围内进行了对比计算[51]。图 3-54 给出了 $Ma_{\infty}=0.84$，$\alpha=3.06°$时的计算等压线分布和沿弦向的压强分布。计算网格为 383×65×48。两种 TVD 格式的计算结果很一致。在前缘膨胀区和弱激波区(44%和 65%半翼展处)TVD 格式能充分捕获前缘的膨胀波。Harten-Yee 格式捕获前缘的膨胀波更为尖锐，给出的第一道激波位置也更接近实验的结果。B-W 格式计算所得的激波位置则更偏于下游。对强激波的捕获(20%，44%和 65%半翼展处)，B-W 格式计算结果表现出有振荡，TVD 格式则没有。计算结果还表明，除在前缘膨胀区及激波附近外，用两种 TVD 格式计算的解基本上保持了等熵值，而 B-W 格式则出现了熵值的振荡[51]。可以说 TVD 格式比 B-W 格式具有更强的前缘膨胀波捕获能力和更高的强激波分辨率，但需付出更大的计算量为代价。表 3-2 给出了计算时间的比较。

表 3-2　计算时间的比较

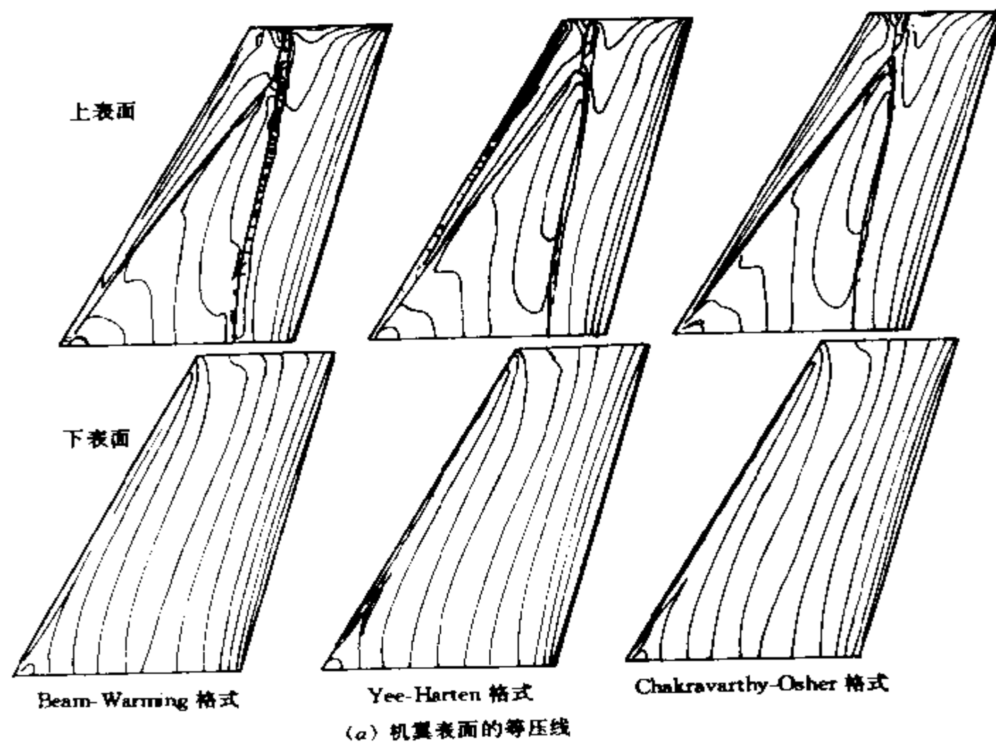
方　法	一次迭代的时间	迭代次数	总 CPU 时间
Harten-Yee	1.75	1.28	2.4
Chakravarthy-Osher	2.22	1.05	2.2
B-W(二阶)	1.0	1.0	1.0
(四阶)	1.02	0.95	1.0

Kroll 采用传统中心型差分，通量分裂的迎风型、迎风 TVD 格式和对称 TVD 格式等方法对高速流动求解了 N-S 方程[52]。表 3-3 为各种方法的简要说明，图 1-3 表示欲计算的复杂流动示意图。计算结果表明，所有迎风格式与 Ma 无关，分辨激波的能力都很强，中心型差分方法则不然。对所计算的复杂激波干扰流动结构的结果表明，迎风 TVD 和 Roe 通量差分裂方法有最小的耗散，在较粗网格(120×80)中即可表现出非定常振荡形态及声速线与物体间产生的反射斜激波形态，而对称 TVD 格式和 Van Leer 通量分裂方法则需在更细的网格(240×160)中才能获得这些形态，中心差分方法则不可能获得这些形态，然而各种方法计算所得表面压强则相当一致。

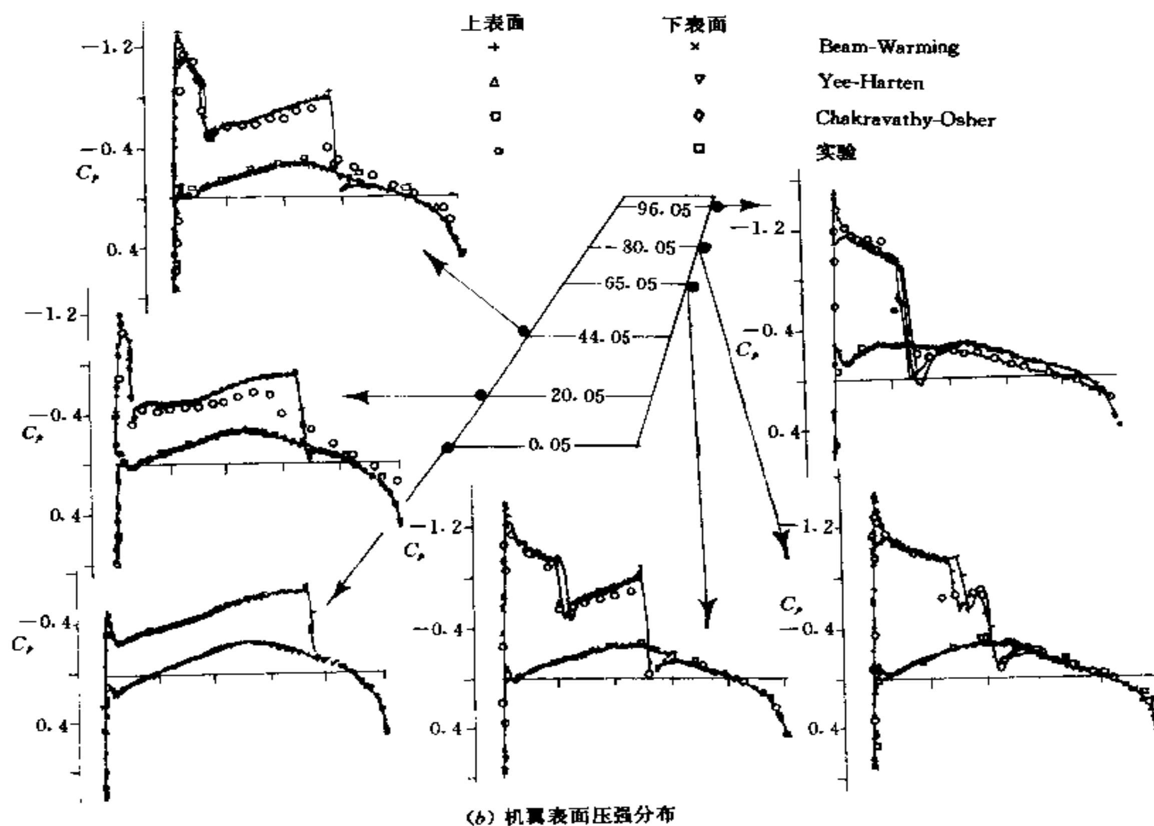
表 3-3　计算的方法

方　法	空 间 差 分
1	Jameson 中心差分$+2^{nd}-4^{th}$人工粘性
2	LW 中心差分$+2^{nd}+4^{th}$人工粘性
3	SW 矢通量分裂+MUSCL
4	Van Lee 矢通量分裂+MUSCL
5	Roe 通量分裂+MUSCL
6	对称 TVD(non-MUSCL)
7	Harten-Yee 迎风 TVD(non-MUSCL)

综合所有对 TVD 格式的研究和数值模拟的比较，表明这种高分辨率格式非常适宜于模拟高马赫数的流动和对复杂激波结构流动的细致描述。



(a) 机翼表面的等压线



(b) 机翼表面压强分布

图 3-54 不同方法计算 $M6$ 机翼的比较 $Ma_\infty=0.84$ $\alpha=3.06°$

第四节　ENO 格式

Harten 和 Osher 表明[53]，TVD 格式至多只能达到二阶精度。从上节知 TVD 格式在极值点将自动蜕化为一阶精度。为提高精度和改进在极值点处的性质，Harten 和 Osher 首先提出了一种"基本无振荡——ENO(Essentially Non-Oscillatory)格式[53,54]的概念。它们是守恒的、基本(almost)TVD 的、具有一致的高阶精度"(uniformly high-order accurate)的。即满足条件：存在与空间步长 h 和时间步长 $\tau=0(h)$ 无关的常数 C，使对 $n\leqslant\frac{T}{\tau}$ 成立

$$TV(u^n)\leqslant C\cdot TV(u^0) \tag{3-159}$$

其中 u^0 是(3-91)的初值函数。第三节中已指出算法格式收敛于微分方程的弱解。

由(3-159)知，它是总变差有界。相比于 TVD 格式，ENO 格式放松了总变差的条件，换来的是"一致的高阶精度"，即 TVD 和 ENO 的一个主要差别是，ENO 可以在极值点保持空间的高精度，而 TVD 在极值点将蜕化为一阶精度。

Harten 等构造的 ENO 格式[53,54]是 Godunov 方法的改进，包括以下几点：

1. 定义网格单元平均解，即 $\bar{u}(t,x)=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}u(t,x+y)\mathrm{d}y$，其中 $u(t,x)$ 为式(3-91)的解。以后所构造的格式是对这个单元平均解 $\bar{u}$ 而言，故一个时间步推进时是从上一个时间步计算所得 $\bar{u}(t^n,x)$ 的节点近似值 $\bar{u}_j^n$。

2. 函数重建(reconstruction)

由 $\bar{u}(t^n,x)$ 的网格点值 $\bar{u}_j^n$ 重建一个函数 $R(x,\bar{u}^n)$，它满足：$R(x,\bar{u}^n)$ 是分片光滑的和 $R(x_j,\bar{u}^n)=\bar{u}_j^n$ 的条件。

3. 以 $R(x,\bar{u}^n)$ 为初值求解

$$\begin{cases}w_t+(f(w))_x=0 & t\in[t^n,t^{n+1}]\\ w_l(t^n,x)=R(x,\bar{u}^n) & x\in[-\infty,\infty]\end{cases} \tag{3-160}$$

的初值问题。

4. 将求得解 $w(t^n+\tau,x)$ 作网格平均，即得

$$\bar{u}_j^{n+1}=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}w(t^n+\tau,x_j+y)\mathrm{d}y,\qquad j=-\infty,\cdots\cdots,+\infty \tag{3-161}$$

为简化表示，用 E 表示发展算子，即 $u(t,\cdot)=E(t)\cdot u^0(\cdot)$；用 A_h 表示网格平均积分算子，即

$A_h\cdot u(t,x)=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}u(t,x+y)\mathrm{d}y$。于是由上述步骤组成的一个时间推进过程可表为：

$$\bar{u}_j^{n+1}=(A_h\cdot E(\tau)\cdot R(x,\bar{u}^n))_j \tag{3-162}$$

现讨论要使上述步骤组成的算法格式是 ENO 的，算子 R,E,A_h 应满足的条件[53,54]：

1. 当 u^n 为微方程(3-91)精确解 $u(t^n,x)$ 的网格平均值时，要求重建函数 $R(\mathrm{x},\bar{u}^n)$ 满足与 $u(t^n,x)$ 的逼近条件，即

$$R(x,\bar{u}^n)-u(t^n,x)=e(x)h^l+O(h^{l-1}) \tag{3-163}$$

其中　$e(x)$ 是一个对 x 光滑的函数。且要求 R 满足"基本无振荡"条件，即

$$TV(R(x,\bar{u}^n))\leqslant TV(u(t^n,x))+O(h^l) \tag{3-164}$$

其中 l 为格式的精度阶。

2. 在第三步中精确求解(3-160)非线性方程是困难的，可以采用“充分精确”的近似方法求解，即要保证近似方法的截断误差$\leqslant O(h^{l+1})$和$w(t^{n+1},x)$满足总变差条件：

$$TV(w(t^{n+1},x))\leqslant TV(R(x,\bar{u}^n)) \tag{3-165}$$

3. 由A_h的定义可知，它是应具有保精度和保单调的性质，即若函数$\alpha(x)$和$\beta(x)$满足$\alpha(x)-\beta(x)=O(h^l)$，则必须$A_h(\alpha(x)-\beta(x))=O(h^l)$；此外还应$TV(A_h\cdot\alpha(x))\leqslant(\alpha(x))$。

由满足上述条件的算子组成的算法格式显然满足：

$$\begin{aligned}TV(\bar{u}^{n+1})&=TV(A_h\cdot E(\tau)\cdot R(x,\bar{u}^n))=TV(A_h\cdot w(t^{n+1},x))\leqslant\\&TV(w(t^{n+1},x))\leqslant TV(R(x,\bar{u}^n))\leqslant TV(u(t^n,x))+O(h^l)\end{aligned}$$

此即为具有$O(h^l)$阶精度的ENO格式。

文献[53,54]分别讨论了“一致二阶”和“一致高阶”的ENO格式的具体内容。文献[55,56,57]讨论了ENO格式的应用结果。ENO格式目前尚在发展中。

第五节　对时间的积分

对无粘通量的空间离散结果得到一组半离散的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{w})=0 \tag{3-166}$$

对此方程组的时间推进方法可分显式和隐式两类。显式方法的优点是每时间步的计算工作量和存贮量均较少，且程序简单；缺点是其时间步长因稳定性要求而受到限制，当局部网格很密时，时间步长必须非常小而使整个计算时间步长数很大。隐式方法的优点是在线性分析时往往是无条件稳定的，在实际计算时时间步长亦可取得较大使总体效率较高；缺点是对每一时间步长要求解线性方程组，因此计算工作量和内存占用量均很大。目前使用较多的显式方法为多步Runge-Kutta法(第一节中已作介绍)，并可采用残值光滑和多重网格等措施加速收敛[4]。下面介绍两种改进的隐式方法。

一、隐式近似因子分解方法

隐式近似因子分解方法(Approximate Factorization Method)，简称AF方法[58]。

以二维守恒律方程组

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})}{\partial y}=0 \tag{3-167}$$

为例，利用泰勒级数展开有：

$$\Delta\boldsymbol{u}^n=-\frac{\Delta t}{2}\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial y}\right)^n+\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial y}\right)^{n+1}\right]+O(\Delta t^3) \tag{3-168}$$

其中　$\Delta\boldsymbol{u}^n=\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n$，若令$\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{B}=\dfrac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{u}}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{n+1}&=\boldsymbol{F}^n+\boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n)+O(\Delta t^2)\\\boldsymbol{G}^{n+1}&=\boldsymbol{G}^n+\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n)+O(\Delta t^2)\end{aligned} \tag{3-169}$$

将其代入(3-168)得：

$$\Delta\boldsymbol{u}^n+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}^n\Delta\boldsymbol{u}^n}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{B}^n\Delta\boldsymbol{u}^n}{\partial y}\right)=-\Delta t\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial y}\right)^n+O(\Delta t^3) \tag{3-170}$$

令$-\Delta t\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}+\dfrac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial y}\right)^n=RHS^n$，可由第$n$层时间步上的参数值算出。

式(3-170)又可写为：

$$[\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}(\frac{\partial \boldsymbol{A}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{B}^n}{\partial y})]\Delta \boldsymbol{u}^n = RHS^n + O(\Delta t^3) \tag{3-171}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 为单位算子。对算子作近似因式分解可得

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \boldsymbol{A}^n}{\partial x})(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \boldsymbol{B}^n}{\partial y})\Delta \boldsymbol{u}^n \\
&= (\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \boldsymbol{A}^n}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \boldsymbol{B}^n}{\partial y}-\frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial \boldsymbol{A}^n}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{B}^n}{\partial y})\Delta \boldsymbol{u}^n \\
&= \left[\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}(\frac{\partial \boldsymbol{A}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{B}^n}{\partial y})\right]\Delta \boldsymbol{u}^n + O(\Delta t^3)
\end{aligned} \tag{3-172}$$

可见，若用上式左端算子近似其右端算子作用于 $\Delta \boldsymbol{u}^n$ 上，对 t 的截断误差为二阶。这样，式(3-171)可改写为：

$$\begin{cases}
(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \boldsymbol{A}^n}{\partial x})\,\overline{\Delta \boldsymbol{u}^n} = RHS^n \\
(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \boldsymbol{B}^n}{\partial y}\Delta \boldsymbol{u}^n = \overline{\Delta \boldsymbol{u}^n}
\end{cases} \tag{3-173}$$

式(3-173)以二阶时间精度等介于式(3-171)，但其每一个式子均只在一个方向上求导，对其作空间离散后对应于左端算子的线性代数方程组系数阵为块三对角阵，可用块追赶法求解。

二、LU 分解方法

上述 AF 方法需在每个方向上求解块三对角方程组，用块追赶法求解过程中需对每一个子块矩阵求逆，其阶数虽不太高(三维问题块为 5 阶)，但在每个时间步上需求 $3x$ 节点数个块矩阵的逆，计算量仍很大。LU 分解算法〔59〕可以大大减少计算量。

以式(3-173)中第一式的离散方程

$$\Delta \boldsymbol{u}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\boldsymbol{A}_{i+1,j}^n\overline{\Delta \boldsymbol{u}}_{i+1,j}^n - \boldsymbol{A}_{i-1,j}^n\overline{\Delta \boldsymbol{u}}_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = RHS_{i,j}^n;$$

$$i = 1,2,\cdots,N-1 \tag{3-174}$$

为例，由于

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}^{-1},\quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_4) \tag{3-175}$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_4$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{Z}$ 的列为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，利用矢通量向量分裂技术有：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+ + \boldsymbol{A}^-,\quad \boldsymbol{A}^\pm = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Lambda}^\pm\boldsymbol{Z}^{-1} \tag{3-176}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^\pm = \mathrm{diag}(\lambda_1^\pm,\cdots,\lambda_4^\pm),\quad \lambda_i^\pm = \frac{\lambda_i \pm |\lambda_i|}{2},\quad i = 1,\cdots,4$$

记 $h=\frac{\Delta t}{\Delta x}$，且定义差分算子 $\mathrm{D}, \mathrm{D}_+, \mathrm{D}_-$ 分别为：

$$\mathrm{D}(f_i) = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2},\quad \mathrm{D}_+(f_i) = f_{i+1}-f_i,\quad \mathrm{D}_-(f_i) = f_i - f_{i-1}$$

于是式(3-174)可写为(略去上标 n 与下标 j)：

$$\overline{\Delta \boldsymbol{u}_i} + \frac{h}{2}\mathrm{D}(\boldsymbol{A}_i\overline{\Delta \boldsymbol{u}_i}) = RHS_i \tag{3-177}$$

当 $\boldsymbol{A}\overline{\Delta \boldsymbol{u}}$ 作为 x 的函数二阶连续可微时，由式(3-176)可推出：

$$\mathrm{D}_-(\boldsymbol{A}_i^+\overline{\Delta \boldsymbol{u}_i}) + \mathrm{D}_+(\boldsymbol{A}_i^-\overline{\Delta \boldsymbol{u}_i}) = \mathrm{D}(\boldsymbol{A}_i\overline{\Delta \boldsymbol{u}_i}) + O(\Delta x^2)$$

代入式(3-177)得：

$$[I + \frac{h}{2}(D_- A_i^+ + D_+ A_i^-)] \overline{\Delta u_i} = RHS_i + O(\Delta x)^2 \tag{3-178}$$

对式(3-178)左端采用近似因子分解法得：

$$(I + \frac{h}{2}D_- A_i^+)(I + \frac{h}{2}D_- A_i^-) \overline{\Delta u_i} = [I + \frac{h}{2}(D_- A_i^+ + D_+ A_i^-)] \overline{Du_i} + O(\Delta x^3) \tag{3-179}$$

于是式(3-174)可改写为

$$\begin{cases} (I + \frac{h}{2}D_- A_i^+) \overline{\overline{\Delta u_i}} = RHS_i \\ (I + \frac{h}{2}D_+ A_i^-) \overline{\Delta u_i} = \overline{\overline{\Delta u_i}}, \quad i = 1,2,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{3-180}$$

上式两步中均只包含单边差分(第一步为后差,第二步为前差),相应的块 N-1 阶矩阵可分裂为块下三角和块上三角,且只有对角列和次对角列非零。这样不必求块阵的逆而仅用前向递推即可求解第一式得$\overline{\overline{\Delta u}}$,再用后向递推可得$\overline{\Delta u}$。

前述讨论中用到了条件(3-175),一般仅当微分方程组为 Euler 方程,即仅有无粘通量时这种相似变换才易构造。当求解含有粘性通量的 N-S 方程时,为了格式简单,节省计算工作量,经常在$A^{\pm}$中加入一个对应粘性的系数 K 来保证稳定性。文献[4]中的做法如下:取

$$V = \max(2\mu, \lambda + 2\mu, \frac{\gamma\mu}{Pr})$$

$$K = \frac{V}{Re \cdot \rho \cdot \Delta x}$$

其中　$\lambda+2\mu$ 为粘性应力的系数,Pr 为 Prandtl 数,γ 为比热比,Re 为雷诺数,ρ 为密度

令　　　$\hat{A}^{\pm} = Z|\Lambda^{\pm} \pm KI|Z^{-1}$

这里对矩阵取绝对值意为对其每个元素取绝对值,于是,对 N-S 方程,式(3-180)可写为:

$$\begin{cases} (I + \frac{h}{2}D_- \hat{A}^+) \overline{\overline{\Delta u}} = RHS, \\ (I - \frac{h}{2}D_+ \hat{A}^-) \overline{\Delta u} = \overline{\overline{\Delta u}} \end{cases} \tag{3-181}$$

注意第二个式中改为负号,这是由于在 $\hat{A}^-$ 定义中取了绝对值。并且 RHS 中也要加入粘性项。

以上,以(3-174)为例讨论了 x 方向上的 LU 分解,对 y 方向也可类似处理以避免求解决三对角方程组。

参 考 文 献

[1] Godunov S K. A finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. Sov. Math. Sb. 47:271-306,1959

[2] Harten A, Hyman J M, Lax P D On finite difference approximations and entropy conditions for shocks. Comm. Pure Appl. Math 29:297-322,1976

[3] 张涵信. 求介气动方程的高阶精度格式及其相关的问题. 第七届全国计算流体力学会议论文集,1994

[4] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes. AIAA 81-1259

[5] Swanson R C, Turkel E. Artificial dissipation and central difference schemes for the Euler and N-S equations. AIAA 87-

1107.
[6] Martinelli L, Jameson A. Validation of a multigrid method for the Reynolds averaged equations. AIAA 88-0414.
[7] Vatsa V N, Wedan B W. Development of a multigrid code for 3-D Navier-Stokes equations and its application to a grid refinement study. Computers & Fluids, 18: 391-403,1990
[8] Vatsa V N. Evaluation of a multigrid-based Navier-Stokes solver for aerothermodynamic computations. AIAA 92-4563
[9] Swanson R C, Turkel E. On central difference and upwind schemes. J. of Comp. Phys, 101;292-306,1992
[10] Swanson R C, Turkel E. Aspects of a high resolution scheme for the Navier-Stokes equations. AIAA 93-3372
[11] Steger J L, Warming R F. Flux Vector Splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. J. of Comp. Phys., 40: 263-293,1981
[12] Van Leer B. Flux Vector Splitting for the Euler equations. Lect. Notes in Phys., 170;507-512,1982
[13] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V:A second order sequel to Godunov's method. J. of Comp. Phys., 32;101-136,1979
[14] Anderson W K, Thomas J L., Van Leer B. Comparison of finite volume Flux Vector Splittings for the Euler equations. AIAA J. 24; 1453-1460, 1986
[15] Hänel D, Schwane R, Seider G. On the accuracy of upwind schemes for the solution of the Navier-Stokes equations. AIAA 87-1105
[16] Vinokur M, Montagne J L. Generalized Flux Vector Splitting for a real gas. NASA CR 177513, 1988
[17] Scott J N, Niu Y Y. Comparison of limiters in Flux Split algorithms for Euler equations. AIAA 93-0068
[18] Yee H C, Klopfer G H, Montagne J L. High resolution shock capturing schemes for inviscid and viscous hypersonic flows. J. of Comp Phys., 88;31-61. 1990
[19] Anderson W K, Thomas J L, Whitfield D L. Multigrid acceleration of the flux split Euler equations. AIAA J. 26;649-654,1988
[20] Tam L T. LV-SGS implicit scheme for entry vehicle flow comparison with aerodynamic data. AIAA 92-2671
[21] Thomas J L, Taylor S L, Anderson W K. Navier-Stokes computations of vortical flows over low aspect ratio wings. AIAA 87-0207
[22] Payne F M., Ng T T, Nelson R C, Schiff L B. Visualization and flow surveys of the leading edge vortex structure on delta wing planforms. AIAA 86-0330
[23] Ben-Artzi M, Falcovitz J. A second order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics. J of Comp. Phys. 55; 1-32, 1984
[24] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math. 18;697-715, 1965
[25] Chorin A J. Random choics solution of hyperbolic systems J. of Comp. Phys. 22;517-533, 1976
[26] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. J. of Comp. Phys. 43;357-372, 1981
[27] Van Leer B, Thomas J L, Roe P L, Newasome R W. A comparison of numerical flux formulas for the Euler and Navier-Stokes equations. AIAA 87-1104
[28] Bonhaus D L, Wornom S F. Comparison of two Navier Stokes codes for attached transonic wing flows. J. Aircraft, 29: 101-107, 1992
[29] Hirose N, Takanashi S. Computational transonic aerodynamics research in Japan. Symposium Transsonicum Ⅲ, 33-47, 1988
[30] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. SIAM Reg. conf. Series Lectures in Appliced Math., 1972
[31] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic systems of conservation laws. J. Comp. Phys. 49;357-393, 1983
[32] Jameson A, Lax P D. Conditions for the construction of multi-point total variation diminishing difference schemes. ICASE Report 86-18, 1986
[33] Yee H C. Upwind and symmetric shock capturing schemes. NASA TM 89464,1987
[34] Jameson A. Successes and challenges in computational aerodynamics. AIAA 87-1184

[35] Yee H C, Warming R F, Harten A. Implicit total variation diminishing schemes (TVD) for steady state calculations. J. Comp. Phys. 57:327-360,1985

[36] Harten A. On a class of high resolution total-variation stable finite difference schemes SIAM J. Num. Anal. 21:1-23, 1984

[37] Crandall M G, Majda A. Monotone difference approximations for scalar conservation laws. Math. Comp. 34:1-21, 1980

[38] Sweby P K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. SIAM J. Num. Anal. 21:995-1011,1984

[39] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme Ⅱ monotonicity and conservation combined in a second order scheme. J. Comp. Phys. 14:361-370, 1974

[40] Roe P L. Some contributions to the modelling of discontinuous flows. Lect. in Appl. Math. 22:163,1985

[41] Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities I single conservation laws. Comm. Pure Appl. Math. 30:611-638,1977

[42] Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities Ⅱ. self adjusting hybrid schemes. Math Comp 32:363-389,1977

[43] Chakravarthy S R, Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. AIAA 85-0363

[44] Yee H C. On the implementation of a class of upwind schemes for system of hyperbolic conservation laws. NASA TM 86839,1985

[45] Yee H C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. J. of Comp. Phys., 68: 151-179,1987

[46] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. 空气动力学学报. 6:143-164,1988

[47] 张涵信. 差分计算中激波上下游解出现波动的探讨. 空气动力力学学报. 1:112-119,1984

[48] Zhang H X, Zhuang F G. NND Schemes and their applications to numerical simulation of two-and three-dimensional flows. Advances in Applied Mechanics, 29:193-256,1992

[49] Yee H C. Numerical experiments with a symmetric high-resolution shock capturing scheme. Lect. Notes in Phys., 264: 677-683, 1986

[50] Moon Y J, Yee H C. Numerical simulation by TVD schemes of complex shock reflections from airfoils at high angle of attack. AIAA 87-0350

[51] Takakura Y, Ishiguro T, Ogawa S. On the recent difference schemes for the three dimensional Euler equations. AIAA 87-1151

[52] Kroll N, Gaitonde D, Aftosmis M. A systematic comparative study of several high resolution schemes for complex problems in high speed flows. AIAA 91-0636

[53] Harten A, Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes I. SIAM J. on Num. Anal. 24: 279-309,1987

[54] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy S R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes Ⅲ. J. Comp. Phys. 71:231-303,1987

[55] Harten A, Osher S. Engquist B, Chakravarthy S R. Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. J. of Appl. Num. Math. ,2:347-377,1986

[56] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capruring schemes. J. of Comp. Phys. 77:439-471,1988

[57] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes Ⅱ. J. of Comp. Phys., 83:32-78,1989

[58] Beam R M, Warming R F. An implicit finite difference algorithms for hyperbolic systems in conservation law. J. comp Phys. 22:87-100,1976

[59] Obayashi S, Kuwahara k. LU factorization of an implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA 84-1670

第四章　网格生成技术

网格生成技术是计算流体力学(CFD)发展的一个重要分支,目前,在CFD高度发展的美国,网格生成所需的人力时间占一个计算任务全部人力时间的60%左右,可见"网格生成是CFD作为空气动力学工程应用的有效工具所面临的关键技术之一"[1]。在同一文献中Steger还认为"目前生成空间网格的方法可以认为是令人满意的,但在几何描述和表面网格的生成方面仍需做出更大的努力",且"成功地生成复杂外形的网格需要依靠专职队伍的努力"。

为易于较准确地满足边界条件,传统的做法是形成贴体(单域)的计算网格。常用的传统二维网格生成方法大致可分为代数生成方法、椭圆微分方程生成方法和双曲微分方程生成方法等三类。随外形复杂程度的提高形成单域贴体的计算网格更加困难,为此近十多年来发展了不少新的分区结构网格和非结构网格方法。较成熟的结构网格方法有:

1. 对接网格方法;
2. 重叠网格方法。

它们都属于分区网格生成方法,且与流场的分区计算方法以及并行计算方法密切相关,并构成这些算法的基础。新一代的分区结构网格生成方法具有与CAD系统良好的接口并强调有效的数据结构。

非结构网格是另一类型的计算网格。它舍去了网格节点的结构性限制,节点和单元的分布是任意的,因而能较好地处理边界。非结构网格生成方法在其生成过程中都采用一定准则进行优化判定,因而能生成高质量的网格,且很容易控制网格的大小和节点的密度。一旦在边界上指定网格的分布,在两个边界之间可以自动生成网格,无需分块或用户的干予。因而,近年来非结构网格方法,受到了高度的重视,有了很大的发展。

自适应笛卡尔网格方法是近年来发展的另一种处理复杂外形的网格方法。

第一节　单域结构(贴体)计算网格的生成

通常二维流场计算的基本作法是将原来的物理流动平面(x,y)变换(可以不同方法来实现)为计算平面(ξ,η),将原来的求解方程变换为(ξ,η)平面上相应的方程,并在(ξ,η)平面上的均匀网格中求解此方程,为此必须知道相应的导数关系ξ_x、ξ_y,η_x,η_y。网格生成采用某种方法实现这种变换关系,并找到相应的导数关系。二维网格生成的思想和方法可以直接推广至三维。在发展过程中单域(贴体)计算网格生成方法大致可分成三类,即

一、代数生成方法

利用已知的边界值采用中间插值方式来产生网格系的方法一般称为代数生成方法。给出一个包含某些待定系数的特殊曲线坐标函数$\vec{r}(\xi,\eta)$(即插值函数),根据拟合边界上或某些中间点上给定的笛卡尔坐标值,以及可能还有导数值(根据各自方法的特点而异)的要求来确定这些待定系数。这样,在曲线坐标的常值处即可用此插值函数来确定笛卡尔坐标值,从而确定整个网格系统。因此插值函数是代数方法的核心。一维插值函数的一般形式可写成:

$$r(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) r_n \tag{4-1}$$

其中函数 φ_n 是满足

$$\varphi_n(\frac{\xi_m}{I}) = \delta_{mn} \tag{4-2}$$

的多项式,称型函数("blending"function)。若采用 Lagrange 多项式,则

$$\varphi_n(\frac{\xi}{I}) = \prod_{l=1}^{N} \frac{\xi - \xi_l}{\xi_n - \xi_l}; (l \neq n) \tag{4-3}$$

采用不同形式的插值函数,即可形成不同的代数方法。多维时需要多方向的插值,此处仅介绍"超限插值"(transfinite interpolation)的思想[2],即二维时在每一个方向单独采用多项式插值:

$$r(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) r(\xi_n,\eta) \tag{4-4}$$

$$r(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi,\eta_m)$$

图 4-1 两方向的差值

两式相加,则右端项为:

$$S(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) r(\xi_n,\eta) + \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi,\eta_m)$$

在 $\xi=0$ 边界处 $S(0,\eta) = r(0,\eta) + \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(0,\eta_m)$

这表明简单地在各方向单独采用多项式插值不能在边界处拟合给定值,如图 4-1 所示。为此超限插值函数应取为:

$$r(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) r(\xi_n,\eta) + \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi,\eta_m) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi_n,\eta_m) \tag{4-5}$$

这样可以在各边界处都拟合给定值。右端最后一项称为插值的张量-乘积形式。上式也可改写成

$$r(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi,\eta_m) + \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) [r(\xi_n,\eta) - \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi_n,\eta_m)]$$

具体计算时:

$$F_1(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M} \psi_m(\frac{\eta}{J}) r(\xi,\eta_m); \quad \eta \text{ 方向的插值}$$

$$F_2(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(\frac{\xi}{I}) [r(\xi_n,\eta) - F_1(\xi_n,\eta)]; \quad \xi \text{ 方向的插值}$$

$$r(\xi,\eta) = F_1(\xi,\eta) + F_2(\xi,\eta)$$

考虑到只给定两个边界面的函数较难控制所需要的网格的分布,且在壁面附近网格线的正交性对流场的计算结果有较大的影响,因此可采用广义的超限插值[3],即不仅给出函数本身,还给出外法线方向的导数,从而有效地控制在壁面附近插值函数的特点。

二、椭圆型微分方程生成方法

由求解椭圆型微分方程来实现网格生成的方法称为椭圆型微分方程生成法。这种方法的最早代表为著名的 TTM 方法[2]。该方法取 x,y 平面中一对 Laplace 方程:

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \end{aligned} \tag{4-6}$$

的解作为贴体坐标系，该解应满足边界条件

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1(x,y) \\ \eta &= \eta_1 \end{aligned} \qquad [x,y] \in \Gamma_1$$

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_2(x,y) \\ \eta &= \eta_2 \end{aligned} \qquad [x,y] \in \Gamma_2 \tag{4-7}$$

其中 Γ_1 和 Γ_2 分别为物面边界和外边界(图 4-2)，η_1 和 η_2 为两任意给定常数，ξ_1 和 ξ_2 分别为沿 Γ_1 和 Γ_2 的任意选定的单调函数。

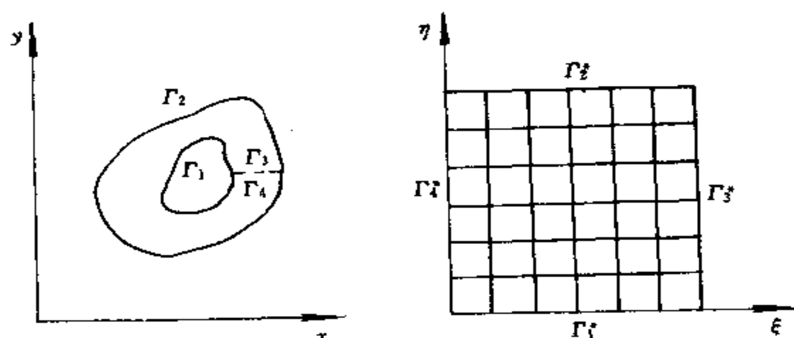


图 4-2 物理平面与计算平面

希望此贴体坐标网格系的计算域与流体的计算域为同一个均匀网格，故式(4-6)和式(4-7)改写成：

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \qquad & \alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \qquad & \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ & \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned} \tag{4-8}$$

边界条件为：

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi,\eta_1) \\ y &= f_2(\xi,\eta_1) \end{aligned} \qquad (\xi,\eta_1) \in \Gamma_1^*$$

$$\begin{aligned} x &= g_1(\xi,\eta_2) \\ y &= g_2(\xi,\eta_2) \end{aligned} \qquad (\xi,\eta_2) \in \Gamma_2^* \tag{4-9}$$

其中 Γ_1^*，Γ_2^* 分别和 Γ_1，Γ_2 对应，f_1，f_2 以及 g_1，g_2 分别由物面边界 Γ_1 及外边界 Γ_2 确定。

将方程(4-8)用中心差分格式离散，再用松弛法(或 ADI 方法)逐次迭代即可最终求得 x，y。

此方法的优点是：1. 所得网格线是光滑的；2. 可以处理复杂的边界；3. 若在方程中置右端项(源项)，使之成为泊桑方程，即可控制网格线分布的疏密及倾斜；其缺点是：1. 较难给定右端项；2. 较难实现内部点的控制；3. 计算时间长。

为了控制内部点的分布，控制网格线分布的疏密，可以在 Laplace 方程(4-6)右端置以 P、Q 项。方程(4-6)写成一般形式后为：

$$\nabla^2 \xi^i = p^i, \quad i = 1,2 \tag{4-10}$$

在实际计算中还可以采用更简单的形式，即考虑各个方向独自的控制，则

$$\nabla^2 \xi^i = g^i p^i, \quad i = 1,2 \tag{4-11}$$

经过变换运算，它们分别变成[2]：

$$g_{22}\boldsymbol{r}_{\xi\xi} + g_{11}\boldsymbol{r}_{\eta\eta} - 2g_{12}\boldsymbol{r}_{\xi\eta} + (\det(J))^2(P\boldsymbol{r}_\xi + Q\boldsymbol{r}_\eta) = 0 \tag{4-12}$$

或

$$g_{22}(\boldsymbol{r}_{\xi\xi}+P\boldsymbol{r}_{\xi})+g_{11}(\boldsymbol{r}_{\eta\eta}+Q\boldsymbol{r}_{\eta})-2g_{12}\boldsymbol{r}_{\xi\eta}=0 \tag{4-13}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为矢量，即 x 和 y。

解此泊桑方程不会遇到任何麻烦，困难在于如何根据控制点的分布给出 P,Q 项。通常希望物面附近的网格线与物面正交(90°)并控制物面处第一条网格线与物面之间的距离。目前所有的源项控制方法都可归纳成如下计算步骤：

1. 在边界处假定源项的初值(最简单是令 $P=Q=0$)；
2. 改变在边界处源项值(即"源项控制)，使生成的网格尽量接近所期望的网格；
3. 将物面与外边界处的源项值内插至流场内部网格点处；
4. 迭代求解该源项值时的泊桑方程。

重复步骤 2-4 直到获得所期望的网格。步骤 4 称"内迭代"，而步骤 2-4 称"外迭代"。注意只在外迭代过程中改变源项值，而在内迭代时保持源项值不变。目前常用的源项控制方法大致可以分成两类，一类根据正交性和网格间距的要求直接导出右端项 P,Q 的表达式；另一类在迭代过程中根据源项变化的情况，采用"人工"控制而实现所期望的网格。Thompson[2]和 Sorenson[4]以及 Thomas 和 Middlecoff 方法[5]皆属前一种。Hilgenstock 方法[6]则属于后一种。下面简单地介绍一下这两类方法的基本思路。

(一) Thompson 和 Sorenson 法

假定在物面具有正交性，则

$$g_{12}=\boldsymbol{r}_{\xi}\cdot\boldsymbol{r}_{\eta}=0 \tag{4-14}$$

同时 $g_{22}=|\boldsymbol{r}_{\eta}|^2, g_{11}=|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2$，方程(4-13)变成：

$$|\boldsymbol{r}_{\eta}|^2(\boldsymbol{r}_{\xi\xi}+P\boldsymbol{r}_{\xi})+|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2(\boldsymbol{r}_{\eta\eta}+Q\boldsymbol{r}_{\eta})=0 \tag{4-15}$$

将此方程分别乘以 $\boldsymbol{r}_{\xi}$ 和 $\boldsymbol{r}_{\eta}$，可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}_{\eta}|^2(\boldsymbol{r}_{\xi\xi}\boldsymbol{r}_{\xi}+P|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2)+|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2\boldsymbol{r}_{\xi}\boldsymbol{r}_{\eta\eta}=0\\ |\boldsymbol{r}_{\eta}|^2\boldsymbol{r}_{\eta}\boldsymbol{r}_{\xi\xi}+|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2(\boldsymbol{r}_{\eta\eta}\boldsymbol{r}_{\eta}+Q|\boldsymbol{r}_{\eta}|^2)=0\end{aligned} \tag{4-16}$$

此两方程提供了保证物面处正交性时确定物面上源项 P,Q 值的表达式。考虑到 $\boldsymbol{r}_{\eta}$ 是沿 η 方向的切向量，故 $|\boldsymbol{r}_{\eta}|$ 代表了 η 方向网格的第一间距，也是给定的控制量，即

$$d_r=|\boldsymbol{r}_{\eta}|$$

因此从式(4-16)中可解得

$$\begin{aligned}P&=-\frac{\boldsymbol{r}_{\xi}\boldsymbol{r}_{\xi\xi}}{|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2}-\frac{\boldsymbol{r}_{\xi}\boldsymbol{r}_{\eta\eta}}{d_r^2}\\ Q&=-\frac{\boldsymbol{r}_{\eta}\boldsymbol{r}_{\eta\eta}}{d_r^2}-\frac{\boldsymbol{r}_{\eta}\boldsymbol{r}_{\xi\xi}}{|\boldsymbol{r}_{\xi}|^2}\end{aligned} \tag{4-17}$$

由于 $d_r=\sqrt{x_\eta^2+y_\eta^2}$ 和 $\boldsymbol{r}_{\xi}\cdot\boldsymbol{r}_{\eta}=0$，$\boldsymbol{r}_{\eta}$ 可以用 $\boldsymbol{r}_{\xi}$ 来表示。上式中除 $\boldsymbol{r}_{\eta\eta}$ 需要从网格本身在外迭代中求得外，其它皆是已知的。从方程(4-17)中求得边界处 P,Q 值后，即可内插到流场内部网格点处确定所有的源项值。

Sorenson 采用上述思想并以指数函数作内插传递的方法编制了二维翼型的网格生成程序(GRAPE)[4]，即设

$$\begin{aligned}P(\xi,\eta)&=p(\xi)\mathrm{e}^{-a\eta}+r(\xi)\mathrm{e}^{-c(\eta_{\max}-\eta)}\\ Q(\xi,\eta)&=q(\xi)\mathrm{e}^{-b\eta}+s(\xi)\mathrm{e}^{-d(\eta_{\max}-\eta)}\end{aligned} \tag{4-18}$$

其中 a,b,c,d 是正常数，表征由边界向内网格源项衰减的速率，较小的常数值表示较慢的衰减，但会引起收敛的困难。根据物面与外边界处网格线正交的控制角和控制距离的几何约束，运用上述方法计算边界处的 p,q,r,s 值，通过内外迭代计算过程，即可生成所期望的二维计算网格。

（二）Thomas 和 Middlecoff 法

Thomas 和 Middlecoff 假设

$$\begin{aligned} P &= \varphi(\xi,\eta)(\xi_x^2+\xi_y^2) \\ Q &= \psi(\xi,\eta)(\eta_x^2+\eta_y^2) \end{aligned} \tag{4-19}$$

将它们代入式(4-12)，由于

$$\xi_x^2+\xi_y^2=\frac{g_{22}}{(\det(J))^2}$$

$$\eta_x^2+\eta_y^2=\frac{g_{11}}{(\det(J))^2}$$

可得

$$g_{22}(\boldsymbol{r}_{\xi\xi}+\varphi\boldsymbol{r}_\xi)+g_{11}(\boldsymbol{r}_{\eta\eta}+\psi\boldsymbol{r}_\eta)-2g_{12}\boldsymbol{r}_{\xi\eta}=0 \tag{4-20}$$

此方程组可消去 ψ 而得到

$$g_{22}[y_\eta(x_{\xi\xi}+\varphi x_\xi)-x_\eta(y_{\xi\xi}+\varphi y_\xi)]=y_\eta^2[2g_{12}(\frac{x_\eta}{y_\eta})_\xi+g_{11}(\frac{x_\eta}{y_\eta})_\eta] \tag{4-21}$$

其中$(\frac{x_\eta}{y_\eta})_\eta$表征着从 η=常值边界处出发的曲线的曲率。假设在边界处此曲率为零，再计及边界处网格正交条件(4-14)，则方程(4-21)变成

$$g_{22}[y_\eta(x_{\xi\xi}+\varphi x_\xi)-x_\eta(y_{\xi\xi}+\varphi y_\xi)]=0 \tag{4-22}$$

由于正交条件又可写成

$$x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta=0,\qquad x_\eta=-\frac{y_\xi y_\eta}{x_\xi}$$

故方程(4-22)中可以消去所有对 η 的导数，从而可得边界处的

$$\varphi=-\frac{x_\xi x_{\xi\xi}+y_\xi y_{\xi\xi}}{x_\xi^2+y_\xi^2} \tag{4-23}$$

引入边界弧长的导数，$S_\xi=\sqrt{x_\xi^2+y_\xi^2}$，则

$$\varphi=-\frac{S_{\xi\xi}}{S_\xi} \tag{4-24}$$

在 ξ=常数线处可类似地导出 ψ 的表达式，而得到源项 P,Q 值。Thomas 和 Middlecoff 方法虽然可以保持在边界处网格线的正交性，但不能直接控制边界处的网格间距，这是此方法的不足。

（三）Hilgenstock 法

令物面网格间距为

$$d=|\boldsymbol{r}(\xi,\eta+1)-\boldsymbol{r}(\xi,\eta)|$$

要求的网格间距值为 d_r，若 $d_r-d=0$，表示已达要求，则源项 Q 值无需变化。若 $d_r-d>0$，表明间距太小，需要增大 Q 值；反之，$d_r-d<0$，则要减小 Q 值。故可简单地令

$$Q^{(\lambda-1)}=Q^{(\lambda)}+(d_r-d)$$

其中 λ 是外迭代次数。Hilgenstock 法则进一步取

$$Q^{(\lambda+1)}=Q^{(\lambda)}+\sigma\cdot\text{arc tan}(d_r-d) \tag{4-25}$$

其中阻尼系数与衰减函数 arc tan 是为了防止修正量过大引起内层迭代的不稳定，一般取 $0.1\leqslant\sigma$

$\leqslant 0.5$。另一个源项值可从物面网格线的夹角要求达到所希望的角度 α_r 来求得。边界线上每一点的夹角可写成：

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}_\xi \boldsymbol{r}_\eta}{|\boldsymbol{r}_\xi||\boldsymbol{r}_\eta|}\right)$$

若 $\alpha_r - \alpha > 0$，则应减小 P；若 $\alpha_r - \alpha < 0$，则应增大 P。故亦可简单地令

$$P^{(\lambda+1)} = P^{(\lambda)} + (\alpha_r - \alpha)$$

或取

$$P^{(\lambda+1)} = P^{(\lambda)} - \sigma \cdot \arctan(\alpha_r - \alpha) \tag{4-26}$$

在外边界可作类似的控制，只需将阻尼系数改一符号。

White 分别用 $\tanh\left(\frac{\alpha_r - \alpha}{\alpha_r}\right)^\beta$ 和 $\tanh\left(\frac{d_r - d}{d_r}\right)^\beta$ 函数来代替方程(4-25)和(4-26)中 arc tan 函数，其中 β 取 0.8。计算表明这样可提高收敛速度 40%，大大改进了原有的方法[7]。

三、双曲型微分方程生成方法

Steger 和 Chaussee[8]首先提出了用双曲型微分方程来生成二维网格的方法。随后 Steger 和 Rizk[9]将其推广而生成三维网格。双曲方法计算时间要比椭圆方法少 1－2 个量级，且易于控制物面附近网格的质量，然而由于它是推进的方法，其外边界位置不能事先指定，且输入数据中的不连续性会传播至网格系中，加上方法尚不够健全等，因此只适用于外流或分区重叠网格技术中。近来 Chan 和 Steger[10]进一步完善了此方法，对一些敏感的问题，如边界条件，网格单元体积的给定，控制网格质量的因素，物面不连续和角点的处理等等都作了讨论和改进，提高了方法的适应能力。

二维时的正交性条件(4-14)可以作为网格生成的一个控制方程，展开后即为：

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \tag{4-27}$$

此外变换 Jacobian 控制着两个变换空间的小块面积之比，一般令 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$，则

$$\sqrt{g} = |J^{-1}| = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

代表着物理空间中小块的面积。指定它在空间的分布即可以作为网格生成的另一个控制方程，即

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = V(\xi, \eta) \tag{4-28}$$

右端项单元面积分布函数 $V(\xi, \eta)$ 是给定的。

令 $\bar{x} = x - x^\circ$，$\bar{y} = y - y^\circ$，其中 x°，y° 为已知状态解。线化方程中各项，如

$$\begin{aligned} x_\xi x_\eta &= (x^\circ + \bar{x})_\xi (x^\circ + \bar{x})_\eta = (x^\circ{}_\xi x^\circ{}_\eta + x^\circ{}_\xi \bar{x}_\eta + x^\circ{}_\eta \bar{x}_\xi) + 0(\Delta^2) = \\ &x^\circ{}_\xi x^\circ{}_\eta + x^\circ{}_\xi (x - x^\circ)_\eta + x^\circ{}_\eta (x - x^\circ)_\xi = \\ &x^\circ{}_\xi x_\eta + x^\circ{}_\eta x_\xi - x^\circ{}_\xi x^\circ{}_\eta \text{，则可得} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_\xi + \boldsymbol{B}\boldsymbol{r}_\eta = \boldsymbol{f} \tag{4-29}$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ V + V^\circ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x^\circ{}_\eta & y^\circ{}_\eta \\ y^\circ{}_\eta & -x^\circ{}_\eta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x^\circ{}_\xi & y^\circ{}_\xi \\ -y^\circ{}_\xi & x^\circ{}_\xi \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 具有不同的实根，则方程组是双曲型的，给定初值可以沿 η 方向推进。实际上 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的特征根为

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{(x^\circ_\eta)^2 + (y^\circ_\eta)^2}{(x^\circ_\xi)^2 + (y^\circ_\xi)^2}},$$

可见只要$(x^\circ_\xi)^2+(y^\circ_\xi)^2\neq 0$，方程组确是双曲型的。将方程(4-29)中$\xi$向导数用二阶中心差分，$\eta$向导数用一阶后差展开，得

$$\boldsymbol{r}_{i,j-1} - \boldsymbol{r}_{i,j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_{i-1,j+1} - \boldsymbol{r}_{i-1,j+1}) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{f}_{i,j+1} + \varepsilon(\nabla_i\Delta_j)^2\boldsymbol{r}_{i,j} \quad (4\text{-}30)$$

其中，$\nabla_i\boldsymbol{r}_{i,j}=\boldsymbol{r}_{i+1,j}-\boldsymbol{r}_{i,j}$和$\Delta_j\boldsymbol{r}_{i,j}=\boldsymbol{r}_{i,j}-\boldsymbol{r}_{i,j-1}$，最后一项是为计算稳定所加的四阶耗散项。沿每条$\eta$=常数线，方程(4-30)组成2×2的三对角方程组。由物面开始，沿η方向逐条求解方程组，就可生成网格系。

在此方法中需要给定网格单元面积分布函数$V(\xi,\eta)$，一种简单的做法是，作一个周长与物面周长相同的圆，引入极坐标$\theta(\xi)$和$R(\eta)$，沿圆周布置与物面给定分布具有相同弧长的点，它们定义了$\theta_i=\theta(\xi)$。在径向定义所要求的间距分布$R_j=R(\eta)$，可以有多种密集分布方式，若取用指数形式，即

$$R_j = R_{j-1} + (R_2 - R_1)(1+\varepsilon)^{j-2};j = 2,3,4\cdots\cdots \quad (4\text{-}31)$$

其中R_1，R_2和ε皆需给定。应用引入的极坐标线，可以定义空间的网格单元面积分布，即用$V^\circ_{i,j}=(R^2_{j+1}-R^2_j)(\theta_{i+1}-\theta_{i-1})/4$来定义$V_{i,j}$。

第二节　分区对接网格

对于复杂多部件的飞行器外形(或其它复杂流动的外形)，生成单域(贴体)的计算网格是困难的，即使勉强生成，网格质量不能保证，也影响流场数值求解的效果。因此目前常采用分区网格及分区计算技术，即根据外形的特点将总体流场分成若干个子域，对每个子域分别建立网格，并在其中对流动主控方程求解，各子域的解在相邻子域边界处通过耦合条件来实现光滑。区域分解的基本原则是：尽量使每个子域的边界简单以便于网格的建立；各子域大小也尽量相同以实现计算负载的平衡。对并行计算后一点尤为重要。分区又有相邻子区域有重叠部分的覆盖(overlapping)和各子域无重叠部分的对接(patched)两种分法。第六章将具体讨论分区算法，本章则讨论分区网格的生成。

一、分区对接网格的生成步骤

实际飞行器的外形通常是以离散数据给出的，常常不能满足CFD计算的要求，因而在开始生成网格之前，必须进行几何处理，即以适当的方式来定义几何外形，所定义的外形曲线要与原始数据所描述的吻合一致。在几何处理及随后表面网格生成的过程中，插值技术(如非均匀有理B样条——NRBS插值)对保证几何模拟的保真度是非常需要的，也是起决定性作用的[11,12]。在几何处理的基础上生成计算网格。图4-3表示了网格生成的过程。

分区网格生成的步骤通常可归结为：

1. 根据外形和流动特点分区，并确定每区中的网格拓朴；

2. 生成表面网格　在上述几何处理基础上按要求的网格疏密分布生成各部件表面的网格分布。“几何定义和表面网格生成是需要投入最大努力的两个流场模拟领域”[1]，也是最耗时的环节。在大多数网格生成方法和计算软件中表面网格都用表面参数(Spline)形式的坐标来表示[1]。

现取一个机翼/机身/尾翼的全机外形为例，简单介绍生成表面网格的过程[13]。若机身表面形状可以解析表达(如旋成体机身)，则在求出机身与机翼、平尾、腹鳍等部件的交线后，机身及各部件

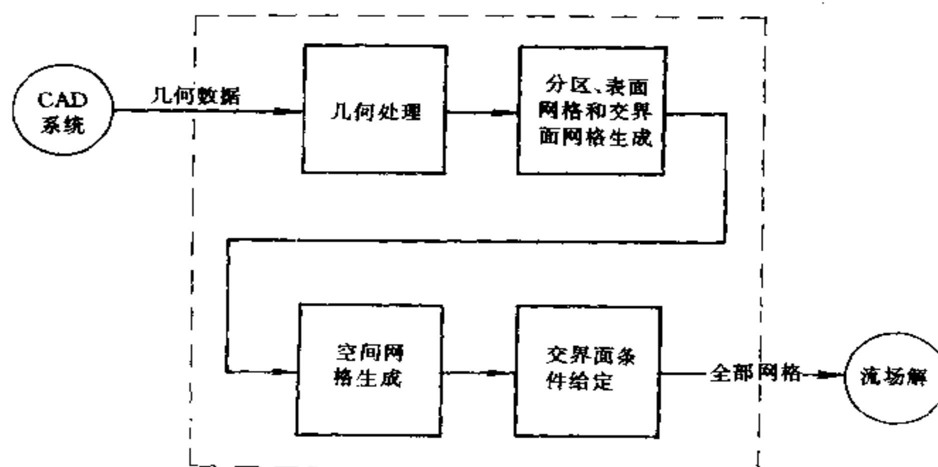


图 4-3　网格生成的过程

表面网格的划分都较容易。但实际飞行器机身外形都以离散的数据方式给定，并且只给出若干个横截面的外形数据，多个截面数据的分布还不完全对应，这样机身外形的模拟及其表面网格的划分需靠插值来完成。飞行器表面网格的划分方法还取决于总体网格的拓朴结构。对于沿机身轴线方向取一系列横截面的方式来划分拓朴时，表面网格的生成按下列步骤进行：

(1) 重新整理机身外形的原始数据：用以弧长为自变量的线性插值对每个机身截面的原始数据重新进行分布，可以等弧长分布，也可以变弧长分布，重新分布的节点数至少要大于原始数据中截面分布节点最大数，以保证重新分布的数据所描述的截面外形与原始外形吻合一致。重新分布形成的新数据在各个截面的节点数是相同的，新数据是机身表面网格生成的基础数据。

(2) 求出机翼、平尾、立尾、及腹鳍等部件的表面函数及与机身的交线函数。

(3) 按网格数及疏密分布的要求沿机身轴向取一系列机身横截面，用基础数据沿 x 方向作样条函数插值，获得这些截面上与基础数据节点数相同的外形曲线(y,z)坐标的节点值，以此节点值分布为基础，按照截面上的网格数及网格点疏密要求，在横截面上用以弧长为自变量的线性插值求得各网格点的坐标(y,z)值，即所需各截面上机身表面的网格，或整个机身表面的网格分布。

以弧长为自变量的线性插值原理为：

设某截面外形曲线有 N 个数据节点(y_i,z_i)，$i=1,2,\cdots,N$。定义 $S_1=0$，依此求得每一节点处的弧长坐标

$$S_i = S_{i-1} + \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}, i = 2,3,\cdots,N \tag{4-32}$$

对于任一弧长值 $S\in[S_1,S_N]$，当 $S\in[S_i,S_{i+1}]$时，对应 S 的 y,z 值为：

$$\begin{cases} y = y_i + \dfrac{y_{i-1} - y_i}{S_{i+1} - S_i} \cdot (S - S_i) \\ z = z_i + \dfrac{z_{i-1} - z_i}{S_{i-1} - S_i} \cdot (S - S_i) \end{cases} \tag{4-33}$$

(4) 其余部件先在弦向生成网格，然后在展向插值获得表面的网格点。

3. 生成交界面网格　空间流场分区后，相邻区之间的公共交界面一般是一个空间曲面，它在空间的位置、走向及其上的网格点分布极大地影响着以它为边界的两相邻空间网格的生成过程和结果的质量。在一空间曲面上生成网格或在空间生成一个网格曲面，原则上讲，可使用的方法是很

多的。这里介绍一种矢性三次多项式插值的方法[13]，通过在两条边界线上的对应节点之间生成网格线来构造交界面网格曲面。设 A，B 分别是这两条边界线上的一对对应点，从 A 到 B 之间的矢性三次多项式插值函数为

$$\boldsymbol{r}(\xi) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\xi + \boldsymbol{a}_2\xi^2 + \boldsymbol{a}_3\xi^3 \tag{4-34}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是节点的位置矢量，$\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 是待定参数。假设要在 A，B 之间形成一条 N 个节点的网格线，则可取 $\xi=(i-1)/(N-1)$，$i=1,2,\cdots,N$。根据 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{r}(1)=\boldsymbol{r}_B$，$\boldsymbol{r}'(0)=\boldsymbol{t}_A$，$\boldsymbol{r}'(1)=\boldsymbol{t}_B$，可以确定待定参数

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{r}_A \\ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{t}_A \\ \boldsymbol{a}_2 = 3(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) - (\boldsymbol{t}_B + 2\boldsymbol{t}_A) \\ \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{t}_B + \boldsymbol{t}_A - 2(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)\end{cases} \tag{4-35}$$

其中 $\boldsymbol{t}_A$，$\boldsymbol{t}_B$ 代表了从 A 点到 B 点的网格线在 A，B 点的切向矢量，其模代表了网格在 A，B 点附近的密度。通过调整 $\boldsymbol{t}_A$，$\boldsymbol{t}_B$ 的大小和方向可控制网格在 A，B 点的密度和走向，生成符合要求的网格。在两条边界线的每一对对应点之间生成一条这样的网格线，这些网格线的集合便在这两条边界线之间构成了一个网格曲面，此即所要求的相邻公共交界面的网格曲面。

当交界面正好是一个平面时，其上的网格可用求解二维椭圆型方程的方法方便地生成。

4. 空间网格的生成　当表面和交界面上的网格生成后，各区的边界即已确定，各区内空间网格原则上可以用代数方法或求解椭圆型方程的方法生成。若用椭圆型方程方法，可先求解 Laplace 方程生成初场网格，再用修正源项方法调整网格线与边界的夹角及与边界的间距，以改善空间网格的质量。

图 4-4 为按上述方法和步骤所生成的一种双立尾现代战斗机外形的表面网格[14]。所选外形

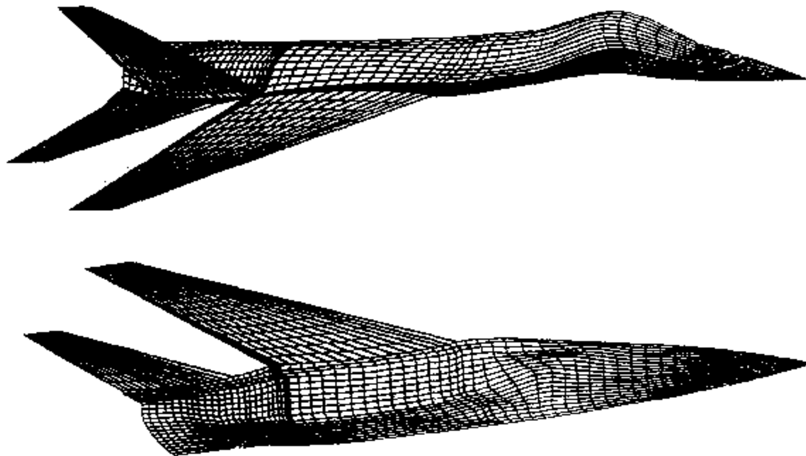


图 4-4　双立尾战斗机的表面网格

为机翼带下反角，立尾、腹鳍有外倾角，机翼、平尾、立尾、腹鳍前缘均后掠。根据外形特点将流场右半空间沿周向分成四区，相邻的公共交界面分别是立尾，机翼和平尾，腹鳍的外边缘外伸形成的空间曲面。公共交界面上网格的分布用矢性三次多项式插值方法生成。机身上下垂直对称面分别为第一，第四区的边界面，其上的网格分布用 Hilgenstock 2D 方法生成。空间网格生成时采用 Hilgenstock 3D 修正源项方法。空间网格在整体上呈 C-O 型拓扑结构。图 4-5 分别为所生成的空

间分区网格的俯视和仰视图。空间网格的迭代过程表明，交界面上的正交性要求不能过高，这是交界面本身在空间的方位及其上的网格点分布局限的结果[13]。因此，空间网格如何分区，采用怎样的分区拓扑，交界面方位的选取、以及交界面上网格生成的方法等因素都会对区内空间网格的生成过程和质量产生影响。发展好的交界面曲面网格生成技术对分区网格是重要的。

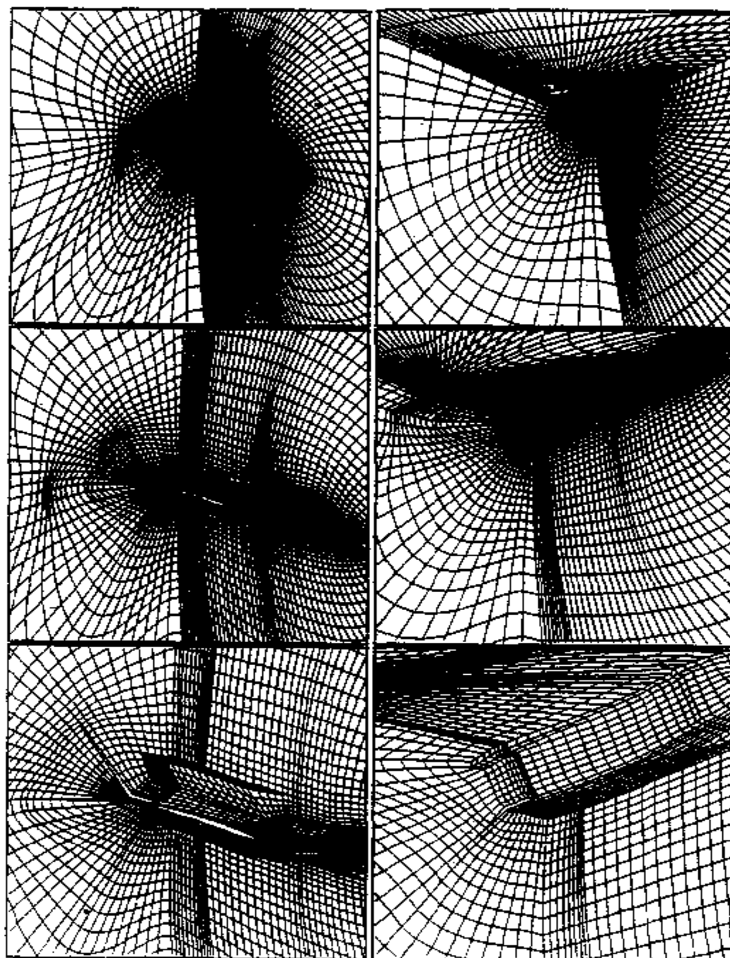


图 4.5　双立尾战斗机的空间网格

二、分区对接网格生成技术发展简介

国外分区网格生成技术始于80年代中期，到80年代末期已逐渐形成实用的软件，具有代表性的有 EAGLE[15]和 GRIDGEN[16]。前者强调完备的技术，它以椭圆型方程网格生成理论为主干，兼有超限插值等代数方法和表面网格生成技术，形成较强的技术处理功能；其缺点是采用批处理的输入方式，不便于用户在短期内熟悉、掌握和使用。GRIDGEN 则以代数网格生成方法为基础，比较注重软件的图形用户界面(GUI)，具有交互式的特点，直观，易于学习和掌握，允许用户在屏幕上构造块结构，查错也快；缺点是网格生成技术的功能不如 EAGLE 完善。90年代以来，两者互相学习，取长补短，EAGLE 增加了 GUI 而变成了 EAGLE View[17,18]。GRIDGEN 也补充了许多 EAGLE 的技术，如基于弧长的超限插值型函数，提高正交性的 Hermit 三次型函数，将交界面划分成更小的交界面的处理和椭圆方程网格生成方法及相关的杂交型源项控制函数，一阶导数的一侧

差分等。两者都增加了与PATRAN和IGES的界面，以增强与CAD连接的能力，因而此两软件都发展成为功能很强的网格生成系统。在此期间各国航空研究院或飞机公司也都相继发展了各自的分区网格生成系统，如NASA在SORENSON方法基础上发展了3D GRAPE[19]和改进的GRAPEVINE[20]，荷兰的国家宇航实验室和意大利的Alcnia/GAT合作开发的ISNaS[21,22]，比利时的IGG[23]，德国的INGRID[24]，英国的SAUNA[25]，麦道飞机公司的MACGS[26]等，这些系统的共同特点是主要依靠超限插值方法生成表面和空间网格，然后用椭圆方程方法光顺；在代数方法中采用Hermite超限插值或在微分方程方法中采用逐次调整源项控制函数使网格线在交界处斜率具有连续性，以保证交界面两边网格线的正交性；都具有GUI和部分连接CAD的功能。

三、新一代分区对接网格技术的特点

上述分区网格生成方法和步骤以及网格生成的实践经验表明，几何处理对整个网格生成的速度和质量影响很大，化费时间很长。图4-6给出了传统网格生成的流程图与一个CFD计算任务周期在时间上的划分情况[27]，可见几何处理与网格生成的时间总和约占整个CFD计算周期的

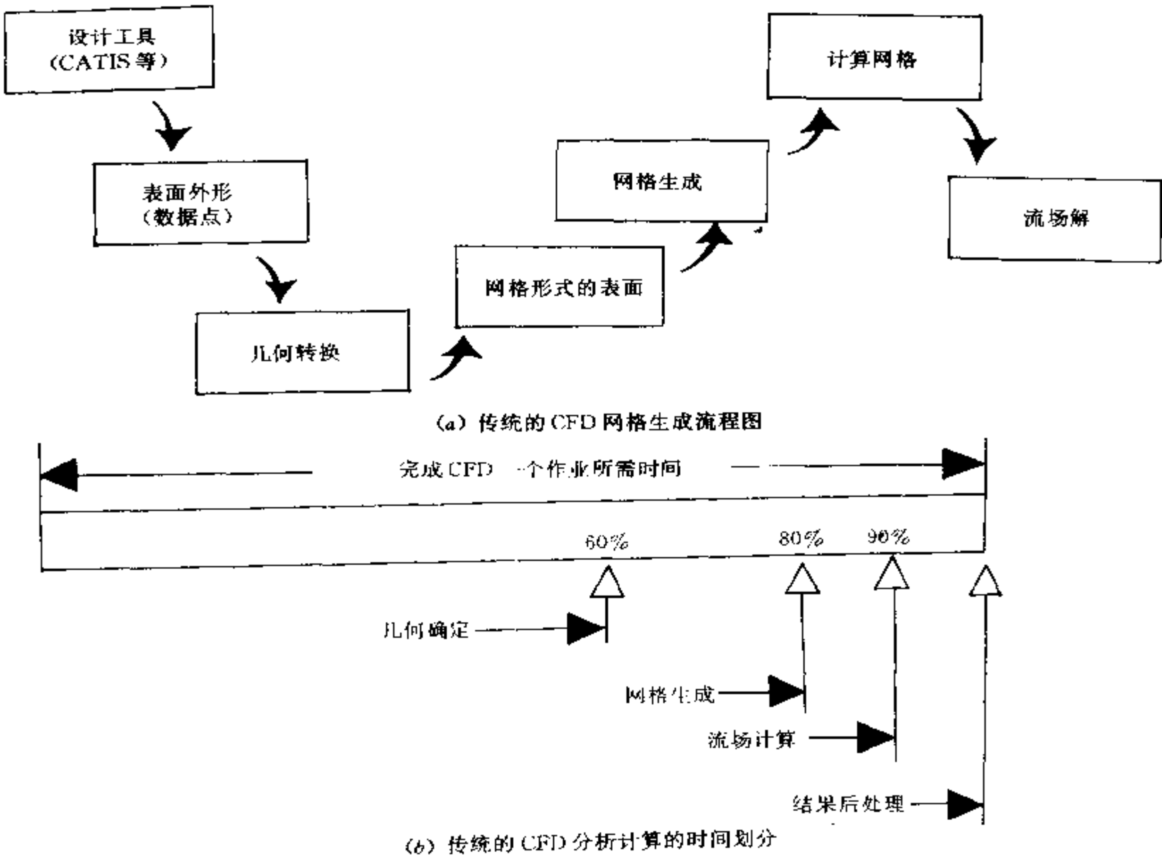


图4-6 传统的CFD网格生成

80%。由于CAD在工程上的广泛使用，从CAD输出描述几何外形的数据转换成CFD计算所依据的几何外形数据已成为刻不容缓的解决CFD计算“瓶颈”问题的任务。90年代的“新一代”分区网格生成软件具有这种自动转换的功能，ICEM/CFD的出现标志着它们的开始。ICEM/CFD基本特点是面向CAD系统，可以在CAD给出的几何造型数据上构造分区，不仅可以构造对接区域，也可构造重叠区域。各区的边界面还可以分解成一些次边界面(sub-face)。软件在每一边缘(edge)上自

动布置所要求的网格点数。图 4-7 表示了采用 ICEM/CFD 的网格生成流程图。ICEM 最初在欧洲

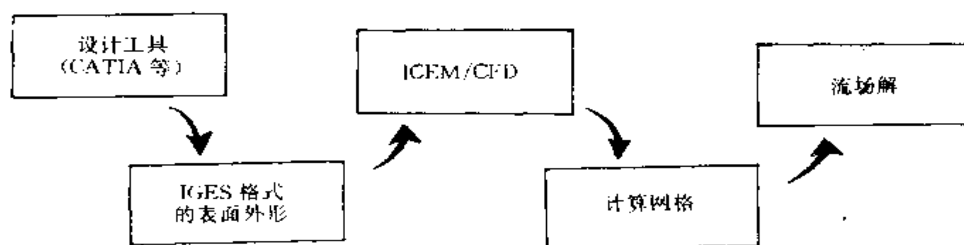


图 4-7 ICEM/CFD 的网格生成流程图

研制，后来由 CDC 公司开发成一种商用软件。Pearce 等[28]利用 ICEM 软件成功地生成了航天飞机发射运载系统(SSLV)的表面网格，采用重叠分区网格技术—Chimera(见下节)生成了 113 个分区 1640 万个网格点，图 4-8 为 SSLV 外形与表面网格的俯视图。网格的生成工作由处于不同地理

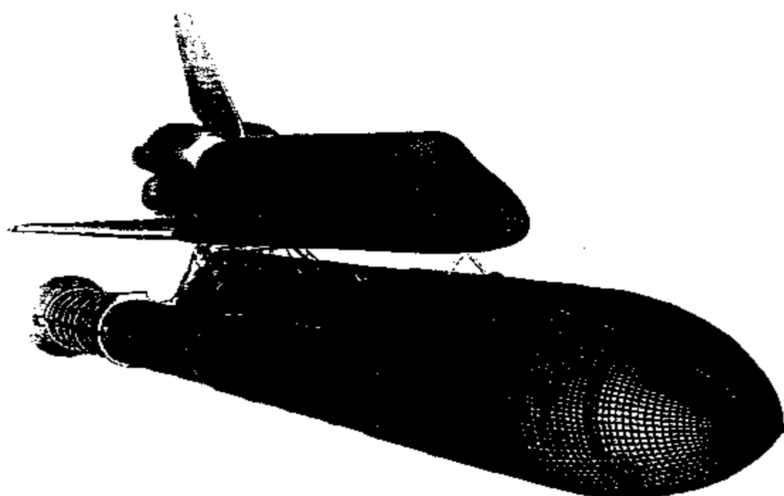


图 4-8 SSLV 的外形和部份表面网格

位置的数个单位共同完成，树立了大型网格生成过程中专职分工、协作攻关的范例。Dominik 等[29]也采用 ICEM 和 GRIDGEN 软件对 SSLV 外形生成了分区对接网格，并利用一些服务性软件将小区合并成大区，生成了共 237 区，近 500 万网格点的网格。类似的软件或在原有的网格生成软件中增强与 CAD 接口的改进版本也正在逐渐增多，如 CAGI(Computer Aided Grid Interface)[12]和改进的 MACGS 系统[11]等，前者是基于非均匀有理 B 样条(NURBS)函数而形成的几何模拟和表面/空间网格生成软件，其中包括：几何转换模块——从 IGES(initial graphics exchange specification 美国国家标准的数据格式，用来定义产品几何形状的数字表示和通讯的一种格式)定义的几何实体转换成 NURBS 格式定义的实体；几何处理模块——用 NURBS 工具实现对已有的复杂几何实体的再处理；几何生成模块——用 NURBS 定义三维曲线、曲面和体积，从而定义出任意外形的几何实体等，它提供了 CAD/CAM 和网格生成系统间的一种连接工具。后者是 MACGS 的改进版本，它由 ZON13G，GMAN 和 GPRO 三个模块组成；ZON13G 进行几何处理，分区，生成表面网格和交界面网格；GMAN 形成分区的空间网格，给定边界条件，给定区域间耦合数据以及输出供流场解使用的数据；GPRO 可以处理区域之间的调整(转换，分裂和合并等)，支持不同格式的输入输出文件。实际上 ZON13G 为网格系统提供了一种几何处理的能力，它包含曲线与曲面的分

割和合并，曲面的相交，曲线的生成，曲面的生成、平移、旋转、放大或缩小等变换，曲线和曲面的扩展，投影和光顺等功能，因此允许 CFD 用户在网格生成过程中按需要完成几何处理。

最后还应提到的是，目前已经有了使用灵活和方便的可以生成高质量和近远场不同疏密分布的分区对接网格的商用软件 Grid pro TM/AZ3000[30]。图 4-9 给出了由此软件生成的多段翼型的分区对接网格示意图，围绕三段翼型共有 20 个子域。

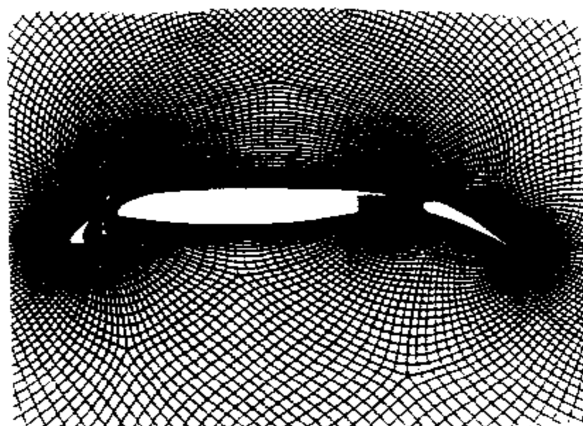


图 4-9 绕三段翼型的对接网格

第三节 分区重叠网格

分区网格的另一种形式是分区重叠网格，又称嵌入式分区网格，即在分区网格中相邻子域的网格具有公共的或重叠的区域。由于不要求各子域共享边界，大大减轻了各区自身网格生成的难度。使用插值方法提供各子域间的必要信息的通讯来满足各子域流场解光滑要求的内边界条件，实现重叠区内交界面处各子域流场解的匹配和耦合，从而取得全流场解。著名的 Chimera 网格嵌入方法是分区重叠网格方法的典型代表，它包含两部分内容：1. 将计算域分成多个互相有重叠部分的子域，选择和划分子域的原则是使每个子域更容易建立所要求的网格。2. 建立各子域间信息传递的机制。所构成的计算程序将分别产生分区网格的坐标和进行插值的数据结构两个输出文件。输出文件和各子域流场的解算器耦合就可以计算整体绕流流场。Chimera 是目前可以处理最高复杂程度外形的一种结构网格技术，如上节中提到的绕 SSLV 外形的跨声速流动，计算的结果与实验结果及试飞数据吻合得很好[31]。图 4-10 表示了该外形 Chimera 重叠网格的示意图。

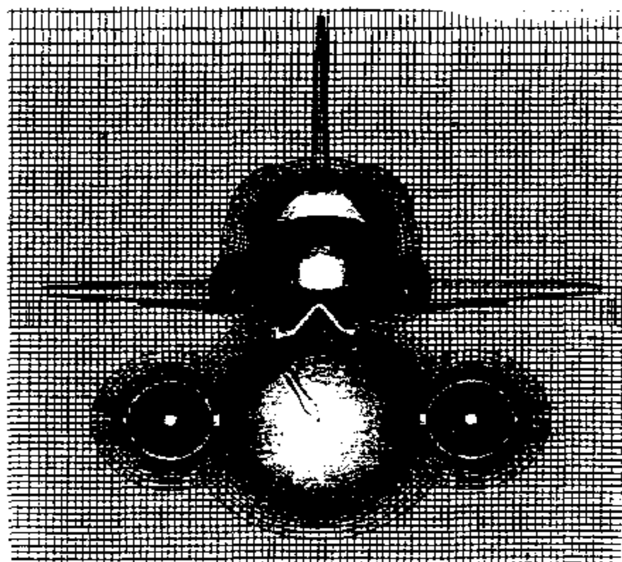


图 4-10 SSLV 重叠网格示意图

一、子域的划分和重叠网格的结构

在计算域中划分子域，并允许子域相互有重叠部分，就必然有某种重叠的结构关系。早期的Chimera要求各子域的重叠关系具有嵌入式的层次(hierarchical)结构[32](图4-11(a))，即构成l层子域的网格系列$G_{l,i}$，$i=1,2\cdots$全部嵌入在$l-1$层的子域网格中，同时又完全包含了第$l+1$层的子域网格。图4-11(a)反映了它们的结构关系和拓扑图，图中的连线表示了网格间的信息链，是数据结构必须保证的。显然这种结构简化了各子域网格关连的方式，特别在内边界处插值时，对相应点的搜索比较容易，因而减少了计算量和对计算资源的要求，但却使应用于较复杂外形时分区困难，故随后又推广成图4-11(b)所示的结构，不要求一个子域被完全包含在另一个子域中，而增大了方法的通用性，并可用已有的单域网格生成程序来形成类似对接的子域网格[33]。以翼身组合体

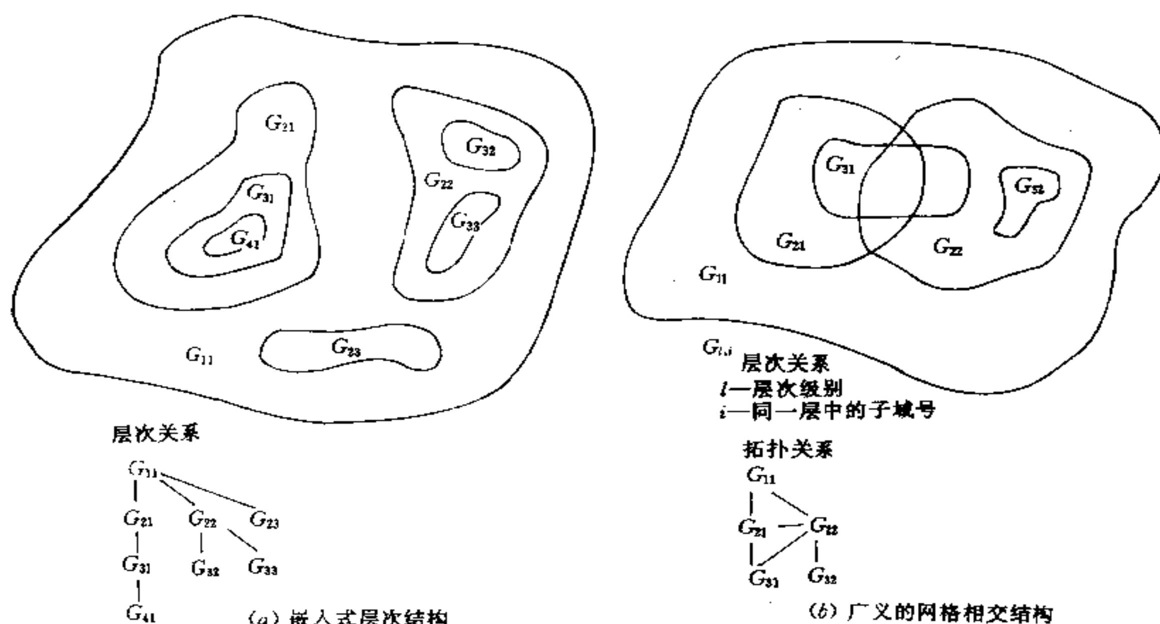
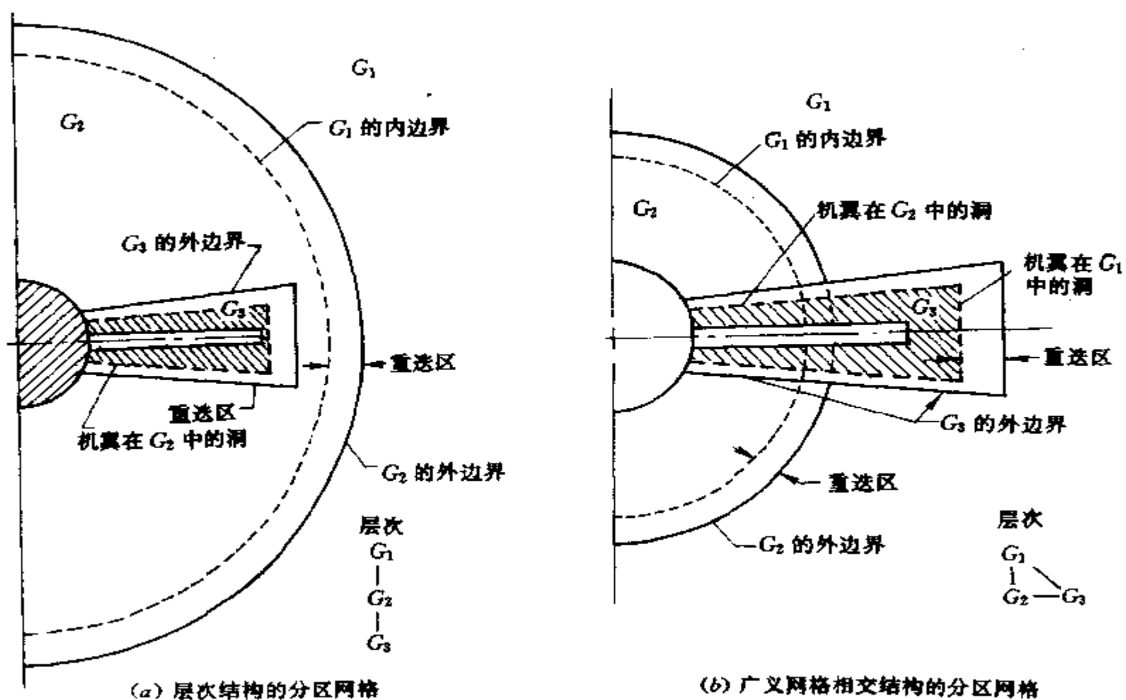


图4-11　嵌入网格的两种结构

为例，图4-12表示了两种结构的区别，在嵌入式层次结构(图4-12(a))中外边界只与G_2关连，而在图4-12(b)中G_3的外边界分别与G_1和G_2相关，因而G_3(机翼的网格)不仅要在G_2(机身网格)中，而且要在G_1(外网格)中"挖洞"、建立人工的内边界，这就增加了计算复杂程度，但使各子域网格生成容易了。

二、重叠区和人工内边界的建立

由于每个部件的网格都是独立生成的，在网格嵌套时需处理好子域网格重叠区的大小和位置。现以图4-11(a)的嵌入式层次结构为例加以说明。对于落在相邻子域网格(如$G_{l-1,i}$)中，固壁边界内的本子域$G_{l,i}$网格点，由于这种点位于计算域外，在解的过程中应去除。此外，若对所有$G_{l,i}$和$G_{l+1,i}$的公共网格点都进行插值和更新，不仅计算量很大，且会降低计算的精度[34]，为此，只对重叠区中的边界点进行插值和更新，这就需在重叠区内建立人工边界。如图4-13所示，包含在子域$G_{l+1,i}$内的那部分$G_{l,i}$的网格点将从$G_{l,i}$中去掉而形成$G_{l,i}$的人工边界或在$G_{l,i}$中引入"洞"。仅仅对$G_{l,i}$洞边



(a) 层次结构的分区网格　　(b) 广义网格相交结构的分区网格

图 4-12　两种嵌入式网格的分区网格

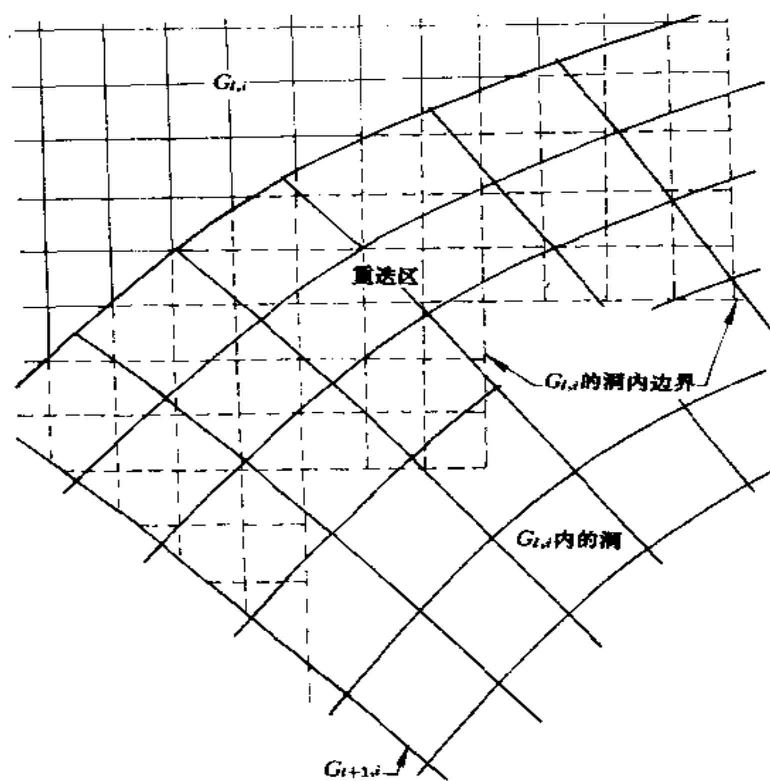


图 4-13　重叠区的网格

界网格进行更新，这样既提高了整体的精度，又减少了计算工作量。为了保证能较精确地通过插值得到网格边界上的流动参数，需要在$G_{l-1,i}$中$G_{l,i}$洞边界外提供足够大的覆盖区（如图4-13所示）。

（一）洞边界的确定

为叙述方便，以二维为例。图4-14显示确定洞边界的过程如下：

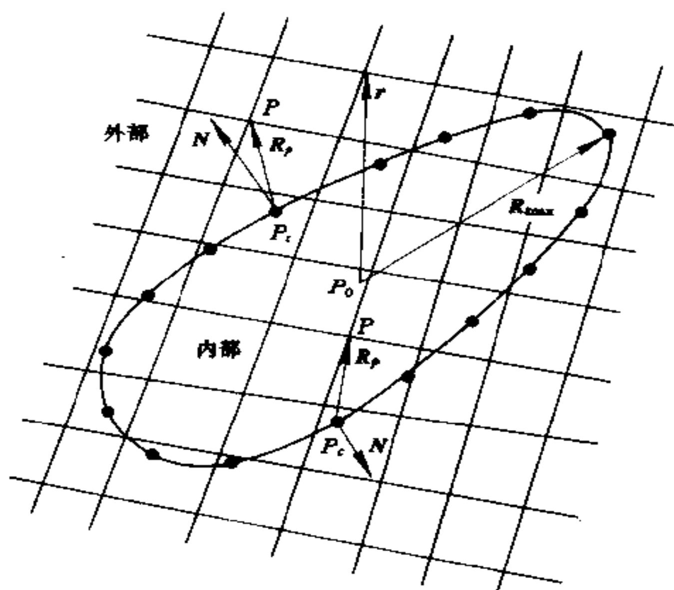


图4-14 洞点搜索的方法

（1）定义初始洞边界，即在$G_{l+1,i}$中选一条曲线C，最简单的方法是选一条网格曲线。

（2）计算C上每一网格点的法向量N。

（3）在曲线C内确定一暂时中心点P_0。

（4）定义搜索圆，以P_0为圆心，半径R_{max}为从P_0到曲线C的最大距离。

（5）相对于P_0计算$G_{l,i}$中每一网格点P的r，若$r>R_{max}$，P点位于圆外；$r<R_{max}$，则P点落在圆内。

（6）计算$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{R}_p$，$N$为$C$上最靠近$P$点的$Pc$点处的法向向量，$\boldsymbol{R}_p$为从$Pc$到$P$的向量。若$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{R}_p>0$，则$P$在$C$外；若$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{R}_p<0$，则$P$在$C$内。

将$G_{l,i}$中落在洞内的点从解中去除，并将其标记参数IBLANK值从1改为0，它们都不能作为边界点。为确定边界点，可以再次搜索$G_{l,i}$中IBLANK＝1的所有网格点P，将最靠近洞边界的P定义为边界点（图4-15），在边界点处的物理参数需要从$G_{l+1,i}$的网格中插值取得。将边界点构成一个插值时使用的清单，一旦清单形成后，为了减少流场计算时间可以再将边界点的IBLANK置为零。

（二）信息的传递——插值

洞边界的确定表示人为地建立了相邻网格重叠区中内边界的位置，流场计算时子域求解过程中必须满足此边界上的边界条件——相邻域的解（流动参数）通过此边界时必须匹配，这可通过插值方法来实现，即在$G_{l,i}$中求解时边界点上的流动参数由相应的$G_{l+1,i}$网格点上的流动参数值通过插值确定。Mastin的结果表明，在二维计算时双线性插值方法优于泰勒级数展开法[35]，因此目前计算中一般都采用双线性插值；类似地，三维计算中采用三线性插值，即

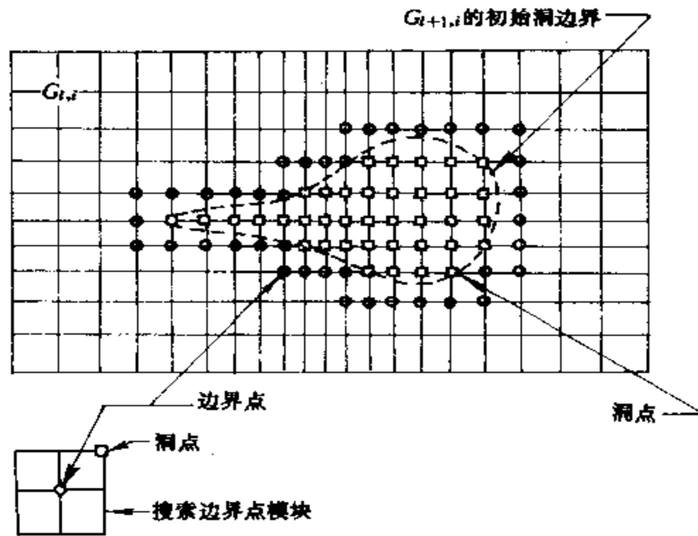


图 4-15　洞点与边界点的关系

$$\phi = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\xi\zeta + a_7\eta\zeta + a_8\xi\eta\zeta \tag{4-36}$$

其中　$0<\xi<1, 0<\eta<1, 0<\zeta<1$，$a_1 \sim a_8$ 是取决于立方体 8 个顶点处流动参数值的系数，即

$$\begin{aligned}
a_1 &= \phi_1 = \phi_{i,j,k} \\
a_2 &= \phi_2 - \phi_1 = \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k} \\
a_3 &= \phi_4 - \phi_1 = \phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j,k} \\
a_4 &= \phi_5 - \phi_1 = \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k} \\
a_5 &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 = \phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i+1,j-1,k} - \phi_{i,j-1,k} \\
a_6 &= \phi_1 - \phi_2 - \phi_5 + \phi_6 = \phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k} - \phi_{i,j,k+1} + \phi_{j-1,j,k+1} \\
a_7 &= \phi_1 - \phi_4 - \phi_5 + \phi_8 = \phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j-1,k+1} \\
a_8 &= -\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 - \phi_6 + \phi_7 - \phi_8 \\
&= -\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j+1,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i+1,j-1,k+1} - \phi_{i,j-1,k+1}
\end{aligned} \tag{4-37}$$

由于三线性插值只能在立方体上使用，而曲线坐标中生成的网格单元是曲六面体，因此为对单元内一点的流场参数进行插值，必须先将曲六面体转换成一个立方体，这可采用等参变换来完成。(ξ,η,ζ)与(X,Y,Z)的对应关系为：

$$\begin{aligned}
X &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\xi\zeta + a_7\eta\zeta + a_8\xi\eta\zeta \\
Y &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\zeta + b_5\xi\eta + b_6\xi\zeta + b_7\eta\zeta + b_8\xi\eta\zeta \\
Z &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\zeta + c_5\xi\eta + c_6\xi\zeta + c_7\eta\zeta + c_8\xi\eta\zeta
\end{aligned} \tag{4-38}$$

其中 $a_i, b_i, c_i, i=1,\cdots 8$ 是取决于物理空间曲六面体顶点坐标的系数，可类似于式(4-37)求。立方体内任一点 P 的 X,Y,Z 是已知的，由式(4-38)利用如牛顿迭代法，可求得对应的(ξ,η,ζ)，再根据式(4-36)找到对应 P 点的流动参数值。

三、流场解的修改

洞中网格点上的流场解应从解中除去。一旦洞内点被确定，并以 IBLANK=0 标识，那么流场

计算的改变是一件简单的事情，仅需修改对流动方程进行数值离散导出的代数方程组：

$$\boldsymbol{A\phi}=\boldsymbol{F} \tag{4-39}$$

为了叙述方便，假定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三对角阵，$\boldsymbol{\phi}$ 为未知向量，$\boldsymbol{F}$ 为已知向量，若以总共 7 个网格点，其中，3，4，5 点为洞边界点的情况为例，则式(4-39)可表为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} \tag{4-40}$$

边界点 3，4，5 的流场参数 ϕ_3、ϕ_4、ϕ_5 分别为 f_3，f_4，f_5，则要求非线角线的元素 a_{32}，a_{34}，a_{43}，a_{45}，a_{54}，a_{56} 为零，对角线上的元素 a_{33}，a_{44}，a_{55}为 1，F_3，F_4，F_5 为 f_3，f_4，f_5。则矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} \tag{4-41}$$

可见将洞的结构插入到计算中时并不改变向量本身。由于洞的结构已由标记 IBLANK 定义，即对应洞内点，IBLANK＝0，否则 IBLANK＝1。因此可建立一个简单的开关实现修改：

$$\begin{aligned} & a_{ij} = a_{ij} \cdot \mathrm{IBLANK}_i & & i \neq j \\ & a_{ij} = a_{ij} \cdot \mathrm{IBLANK}_i + 1 - \mathrm{IBLANK}_i & & i = j \\ & F_i = F_i \cdot \mathrm{IBLANK}_i + f_i(1 - \mathrm{IBLANK}_i) & & \end{aligned} \tag{4-42}$$

第四节　非结构网格

目前较成熟的构造复杂外形网格的方法是分区的结构网格方法，然而从前面两节的介绍可知：若复杂外形需作局部修改或需改变其构型，则将需重新划分区域和构造网格而耗费较多的人力和时间，因此，近年来人们逐渐重视研究另一类网格——非结构网格。非结构网格的基本思想基于如下假设：四面体是三维空间最简单的形状，任何空间区域都可以被四面体单元所填满，即任何空间区域都可以被以四面体为单元的网格所划分。由于非结构网格舍去了网格节点的结构性限制，易于控制网格单元的大小、形状及网格点的位置，因此比结构网格具有更大的灵活性，对复杂外形的适应能力非常强。此外，对于结构网格，在计算域内网格线和平面都应保持连续，并正交于物体边界和相邻的网格线和面；而非结构网格则无此限制，这就消除了网格生成中的一个主要障碍；且其网格中一个点周围的点数和单元数都是不固定的，可以方便地作自适应计算，合理分布网格的疏密，提高计算精度。正因为有这一系列优点，非结构网格技术在 80 年代末和 90 年代初得到了迅速的发展。

已出现了很多不同的方法来生成复杂外形的非结构网格，目前常用的方法可以归结为两大类，即 Delaunay 三角化法和推进阵面法[1]。下面将以二维为例分别介绍它们的基本要点。

一、Delaunay 三角化方法

（一）节点的生成

在二维问题中，可采用一种简单可行的节点生成方法，即在如图 4-16 所示的平面上将控制体分成两部分，其中 $A_nB_nC_nD_n - A_1B_1C_1D_1$ 记为 Ω_2，$A_1B_1C_1D_1$ 以内的区域记为 Ω_1。

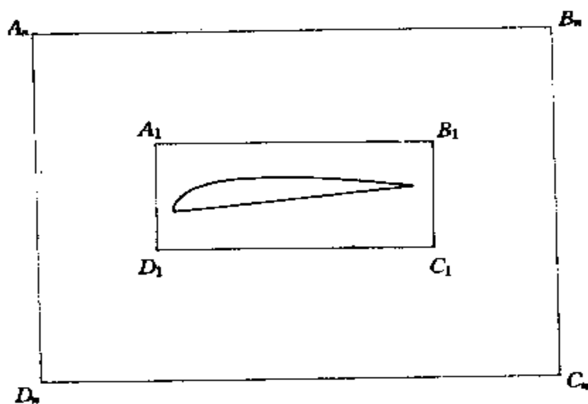


图 4-16　控制体的划分

（1）Ω_1 内节点的生成

首先在 $A_1B_1C_1D_1$ 内生成矩形网格。令 $a=|A_1B_1|$，$b=|B_1C_1|$。设 $A_1B_1C_1D_1$ 的坐标分别为 (x_{A_1},y_{A_1})，(x_{B_1},y_{B_1})，(x_{C_1},y_{C_1})，(x_{D_1},y_{D_1})，则矩形内网格节点的坐标如下：

$$\begin{aligned} x &= a(j-1)/(MY_1-1)+x_{A_1} \qquad j=1,MY_1 \\ y &= b(i-1)/(MX_1-1)+y_{A_1} \qquad i=1,MX_1 \end{aligned} \tag{4-43}$$

其中，MX_1，MY_1 分别为 A_1B_1 和 B_1C_1 上的网格点数，这两个参数控制了物体表面附近的点数。这样就生成了覆盖整个 $A_1B_1C_1D_1$ 区域的节点。其中落入物体外形以内的点是多余的，应该去除。去除方法如下：

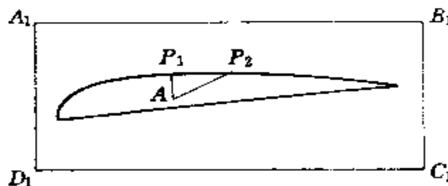


图 4-17　物体内点的删除

假设物体边界为一个凸多边形（如图 4-17 所示），物面离散点按顺时针排列。设物面上的离散点共有 m 个，且表示为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，…，$P_m(x_m,y_m)$。则对于 $A_1B_1C_1D_1$ 内的任意一点 A，定义三角形 ΔP_iAP_{i+1} 的面积为

$$S_i = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} \tag{4-44}$$

若对 $i=1,\cdots,m$，总有 S_i 大于零，则 A 在物体外形里边，应去除。否则 A 在物体边界以外，应当保留。

（2）Ω_2 内节点的生成

以 $A_1B_1C_1D_1$ 为起点，由内向外布置若干个矩形，每一个矩形的边长按平方关系来增大，每一边上的点数按线性关系减小。

（二）三角化方法

（1）基本原理

平面上的节点给出后，下一步工作就是将平面三角化。

平面三角化的依据是 Dirichlet 在 1850 年提出的一种利用已知点集将平面划分成凸多边形的理论。这种理论的基本思想是：假设平面上给出一组点$\{P_i\}$，则$\{P_i\}$中的每一个点（不失一般性，取其中的一点 P_s）都有属于自己的一个区域 S_i，使得区域 S_i 内的任意一点与该点（点 P_s）的距离都比与$\{P_i\}$中其他点的距离近。这种划分方法把平面划分成了一系列不重叠的凸多边形，叫做 Voronoi

区域，覆盖整个控制体，如在图 4-18 中，九个点组成的点集{A}按照 Direchlit 理论将平面划分成了若干个凸多边形（其中有的凸多边形顶点在无穷远处）。以点 5 为例，点 5 所拥有的凸多边形 $V_2V_3V_4V_6V_8$ 中的每一点距离点 5 都比其余的八个点近。这样的凸多边形并不难确定。将点 5 和点集{A}中的其它八点连线，做每一个线段的垂直平分线，则这些垂直平分线就会自动构成一个凸多边形。在图 4-18 中可以看到，点 1，6，9 由于距离点 5 太远，它们与点 5 连线的垂直平分线已经无法参与到属于点 5 的凸多边形中去（凸多边形 $V_2V_3V_4V_6V_8$ 内部的每一点与点 5 的距离显然比它们

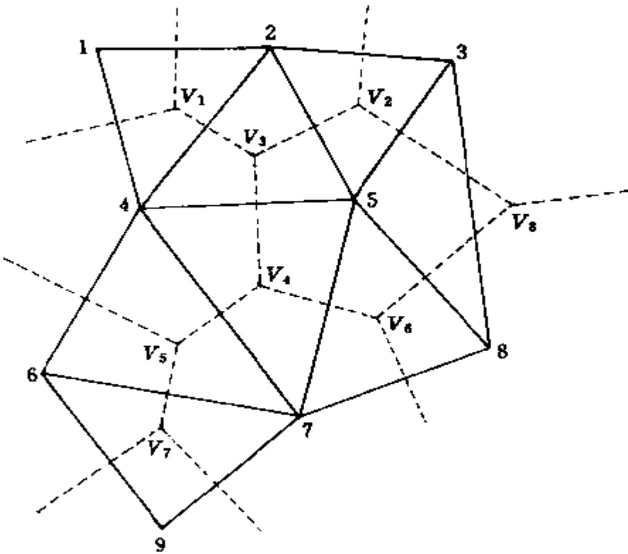


图 4-18　Voronoi 图形和三角化

更近）。凸多边形的每一条边都对应着点集{A}中的两个点，如凸多边形 $V_2V_3V_4V_6V_8$ 中的边 V_2V_3 对应点对(5,2)，边 V_3V_4 对应点对(5,4)…。将所有的点对连线，则整个平面就被三角化了。对给定的这九个点组成的点集{A}来说，这种三角化是唯一确定的。而且生成的三角形的形状都比较接近正三角形。可以说，这种划分对流场的离散和求解是很有利的。这是 Delaunay 方法的优点之一。

为明确概念，我们定义三角形的顶点为“形成点”，“形成点”包括下面将提到的“初始化点”和点集{A}中的点。又定义三角形的垂心（也就是凸多边形的顶点）为“顶点”，“顶点”集记为{V_I}。

表 4-1 给出了图 4-18 所对应的数据关系。每一个凸多边形的顶点周围都有三个点集{A}中的点，而每一个顶点周围又都有三个相邻的顶点。边界上的顶点所对应的相邻顶点在无穷远处，在表中记为－1。这样的数据关系将在下面的三角化过程中起到重要的作用。

表　4-1

顶　点	形成点			相邻顶点		
V_1	1	2	4	V_3	－1	－1
V_2	2	3	5	V_8	V_3	－1
V_3	2	5	4	V_1	V_2	V_4
V_4	4	5	7	V_3	V_6	V_5
V_5	4	7	6	V_4	V_7	－1
V_6	5	8	7	V_4	V_8	－1
V_7	6	7	9	V_5	－1	－1
V_8	3	8	5	V_6	V_2	－1

(2) Delaunay 三角化进程

Delaunay 三角化是一个有序的过程，可由下述步骤来实现：

第一步：初始化

设给定的点集为$\{P_i\}$。首先定义一个包含$\{P_i\}$的凸多边形外壳，对此外壳进行初始三角化，例如可以定义一个四边形，建立起这四个点所组成的 Voronoi 图结构。图 4-19 给出了这一典型的初始化图，表 4-2 则给出了相应的数据结构。顶点 1,2,3,4 并未给出严格的定义，因为它们位于凸壳的外边，因此不拥有三个形成点，也没有三个相邻的顶点。表中我们给出−1 表示缺少的形成点和顶点，以表示这些顶点是空顶点。只要保证能够包含所有给定的点就行了。

表 4-2

顶　点	形成点			相邻顶点		
V_1	1	2	4	V_3	V_6	V_2
V_2	2	3	4	V_1	V_5	V_4
V_3	1	4	−1	V_1	−1	−1
V_4	4	3	−1	V_2	−1	−1
V_5	3	2	−1	V_2	−1	−1
V_6	2	1	−1	V_1	−1	−1

第二步：引入新点

在凸壳内引入一点$P\in\{P_i\}$。新近引入的这一点将破坏原来的三角化结构，将一些三角形删除，并在其周围建立新的三角化结构。

第三步：确定将要被删除的顶点号

前面提到过，每一个顶点都有三个形成点，该顶点又恰好是三个形成点所构成的三角形的外接圆圆心。如果新近引入的一点 P(图 4-19)恰好落入某个顶点所属的外接圆，则该点将被删除。在本例中，新点 P 落入了三角形 1−2−4(顶点 V_1)和 2−3−4(顶点 V_2)的外接圆，因而顶点 V_1,V_2 将被删除(图 4-20)。

第四步：找出每一个被删除顶点的形成点

这些形成点将和新引进的点成为"相邻点"，将分别与新引进的点连线，构成新的三角形和新的顶点(每个三角形的外心)。在本例中，点 1,2,3,4 都是符合条件的形成点。

第五步：确定邻接顶点

确定与被删除的顶点相邻而自己又未被删除的顶点。这些顶点在构造新的顶点结构中将起重要作用。在本例中 V_3,V_4,V_5,V_6 符合上述条件。

第六步：确定新顶点的形成点

确定新的 Voronoi 顶点的形成点。新的顶点的形成点必然是包含新近引入的点和另外两个新近引入的点的"相邻点"，而且这两个点必须构成相邻三角形的一条边。在本例中，新顶点 V_8 的三个形成点是新近引入的点 P 和 P 的两个相邻点 3,4。其他顶点的形成点在表 4-3 中给出。

第七步：确定新顶点的相邻顶点。

根据第六步，所有新顶点的形成点都已被找到，对每一个新顶点，搜索在步骤五中所确定的每个相邻顶点的三个形成点以及其他新顶点的三个形成点，如果其中的某一个顶点的三个形成点中有两个与该新顶点中的两个形成点相重合，则这一个顶点是该新顶点的相邻顶点，在本例中，新顶

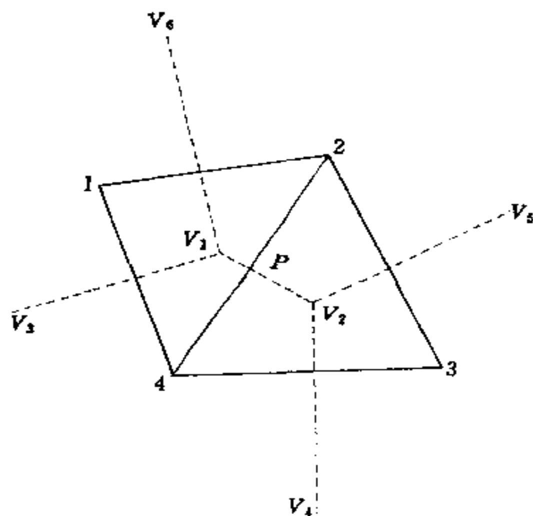


图 4-19 三角初始化

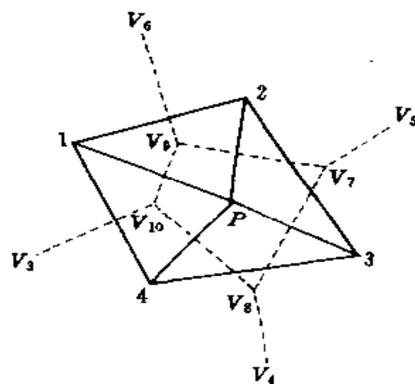


图 4-20 新 Voronoi 图形

点 V_8 的三个相邻顶点是旧顶点 V_4、及新顶点 V_{10},V_7。

第八步:重新整理 Voronoi 图的数据结构

重新整理 Voronoi 图的数据结构,改写被删除的顶点。在本例中 V_1,V_2 是被删除的顶点,为了有效利用空间,我们将这些被删除的顶点改写成新顶点,并给出相应的数据结构。在本例中分别用 V_1、V_2 来取代 V_9,V_{10}即完成了整理工作,形成了新的三角化结构。整理后的数据结构由表 4-3 给出。

表 4-3

顶 点	形成点			相邻顶点		
V_1	1	2	P	V_2	V_6	V_7
V_2	1	P	4	V_1	V_8	V_3
V_3	1	4	−1	V_2	−1	1
V_4	4	3	−1	V_8	−1	1
V_5	3	2	−1	V_7	−1	1
V_6	2	1	−1	V_1	−1	−1
V_7	3	P	2	V_8	V_1	V_5
V_8	4	P	3	V_2	V_7	V_4

第九步:引入新的点

重复第二步～第八步的工作,不断引入新的点,直至$\{P_i\}$中的点全部参加到平面的划分中去,也就完成了 Delaunay 三角化进程。

上面所描述的步骤显然过于繁琐,而且随着$\{P_i\}$中的点的个数的增多,工作量将成平方量级增大。若采用一种树状搜索的方法,将有效地加速其进程。只要能给出生成足够数量节点的方法,并使生成过程系统化,则 Delaunay 三角化方法可具有相当的自动化程度。

(三) 退化的处理

通常情况下,任意一组点在平面上的 Delaunay 三角化是唯一的,但在某些情况下,三角化是不

唯一的，这种情况被称做退化。这一点从 Voronoi 多边形的定义即可知道。在二维问题中，可能发生的退化有以下几种：

(1) 两个点重合；

(2) 应该构成三角形的三个顶点共线；

(3) 四个或四个以上的点共圆。

对于这三种情况，只要在计算中稍加处理即可避免。

(四) 网格的优化

按以上方法所生成的三角形，其形状尽管相对于给定的节点是优化的，但它必然要受到节点位置的影响，因此网格形状未必能尽人意。如果适当调整网格点的位置，网格质量将进一步提高，这称为网格的光顺。常用的一种网格光顺方法称为 Laplacian 光顺方法。这种光顺技术是通过将节点向这个节点周围的三角形所构成多边形的形心移动来实现的。如果 $P_i(x_i, y_i)$ 为一个内部节点，$N(P_i)$ 为与 P_i 相连的节点总数，则光顺迭代技术可表示如下：

$$
\begin{aligned}
x_i &= \sum_{k=1}^{N(P_i)} x_k / N(P_i) \\
y_i &= \sum_{k=1}^{N(P_i)} y_k / N(P_i)
\end{aligned}
\tag{4-46}
$$

光顺方法可以使网格更均匀，三角形更接近于正三角形。均匀的网格对于保证计算的精度和收敛特性都有着极其重要的作用。图 4-21 给出了优化前后的网格局部图。

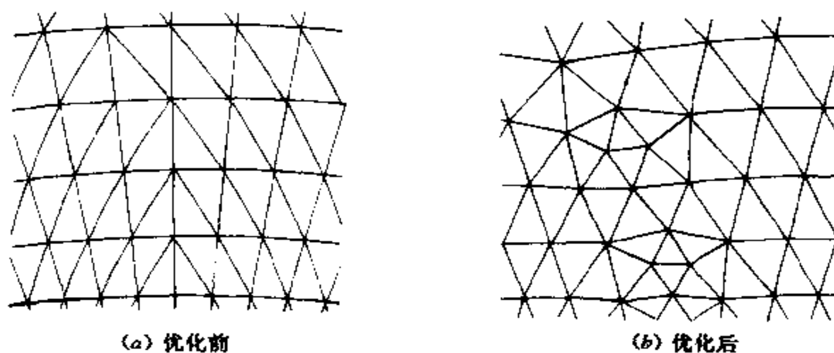


图 4-21 优化前后的网格

(五) Delaunay 方法的发展

构造 Delaunay/Voronoi 图形的方法有 Bowyer 算法[3,6]和 Watson 算法[37]等。在网格生成的应用中较广泛的是采用 Bowyer 算法。Delaunay/Voronoi 图形只解决了在给定点集情况下如何连成一组三角形的问题，从网格生成角度看还需首先产生点集。早期应用 Delaunay 方法的工作是用结构网格技术产生点集，例如 Jameson，Baker 和 Weatherill[38]用保角变换方法对全机各部件独立地生成结构网格，然后用 Delaunay 方法连接以形成整个全机外形的非结构网格。他们的方法与前一节中介绍的 Chimera 方法有某种相似性，差别之处是这里采用 Delaunay 方法连接各部件的网格点，取代了 Chimera 方法中复杂的“挖洞”、建立人工边界和不保证守恒性的线性插值等技术，从而可生成更简单、质量更高的整体网格。作为网格生成的应用，Delaunay 方法后来发展的重点在于研究如何自动生成任意外形的点集。一种常用的方法是将计算域分成一些较大的子域，再对各子

域分别按修正的四叉树(Quadtree)/八叉树(Octree)分解技术剖分,直到最大单元的尺度与边界上离散的尺度相当为止[39]。近来的发展为用推进阵面的思想产生点集,再用 Delaunay 方法连接[40],或用迭代点插入和局部重连等方法连接。重连是根据满足所要求的质量准则优化的反复连接过程,因而大大改进了所生成网格的质量[41]。

二、推进阵面法

(一) 布置控制点和生成背景网格

推进阵面法是网格和节点同时生成的非结构网格生成方法[42]。根据网格密度的需要,在平面上布置一些控制点并给每一控制点定义一个尺度,连接这些控制点即可将平面划分成大块的三角形背景网格。每一三角形背景网格中任一点的尺度都可以根据该三角形三个顶点的尺度插值得到,因此相当于布置了一个遍及整个平面的网格尺度函数。推进阵面法生成非结构网格的质量对背景网格的依赖性很大,如何生成较好的背景网格对此法是否成功极为重要。

背景网格一般有结构和非结构两种。传统的非结构背景网格一般由人工构造,对复杂三维问题这是相当复杂且费时的工作,故不易适应复杂边界的情况;而且在非结构背景网格上插值需要复杂的查询过程,长时间地查询与插值也必然影响推进效率。结构背景网格通常通过求解带源项的热传导方程来光滑分布控制参数[46],自动化程度较高,但需求解非线性偏微分方程。文献[45]提出了采用 Delaunay 方法生成背景网格,可实现背景网格生成的自动化。其主要步骤为:

(1) 沿流场边界布置若干节点——控制点。非结构网格的优点之一就是可以根据要求在任意的位置上进行加密。这种加密是通过在相应的位置上布置控制点和给控制点一个大小合适的尺度来实现的。网格要求加密的地方,尺度要小些,反之尺度要大些。控制点上尺度的大小将与该点周围所生成的三角形的边长大致相当。

(2) 用 Delaunay 准则将控制点连成三角形。控制点布置好以后,可以根据 Delaunay 三角化方法对平面进行三角化,所生成的三角形网格即背景网格。

(3) 在三角形顶点上虽已定义网格尺度,但为实现物体边界与远场边界网格尺度的非线性变化,在流场内嵌入一个指定网格尺度的椭圆人为边界以更好地控制物面边界附近网格的质量。以上步骤均可用程序自动实现。图 4-22 为背景网格的示意图。

(4) 生成背景网格的目的在于将离散点上的尺度插值到整个平面上。每一个背景网格内的尺度可以由它的三个顶点插值得到。因此,在以后的网格生成过程中,当一个新的面积单元和一个新的节点要产生时,只需根据基边中点处的尺度即可确定面积单元的大小和节点的位置。

(二) 定义边界和阵面初始化

在对控制体进行三角化以前,先要定义边界(图 4-23)。控制体的外边界上的边要按逆时针方向组织,相邻的两点连接,形成一个闭合的有向环。内边界也是一个一个的有向闭环,有多少个物体,就有多少个闭环。每一个内边界的边都要按顺时针方向排列。这些边将被作为保留边,在最终的三角化结构中,这些边都将成为三角形的边。

三角化的最初阵面一般就是所有的内边界的总和。阵面由两个整型向量组成。有多少条活动边,阵面向量就有多少个元素。在一个向量里,贮存活动边的一个点,在另一个向量里贮存活动边的另一个点。因为内边界点是按照顺时针方向组织的,所以将要被三角化的控制体始终在活动阵面的左侧。边界始终是不变的,而阵面却要随着三角化的推进而不断更新。随着三角形的生成,新生成的三角形的两条新边将成为活动边,而三角形中的老边将从活动边向量中去掉。直到遇到外边界,阵面上活动边的个数减少到零,三角化过程便结束。

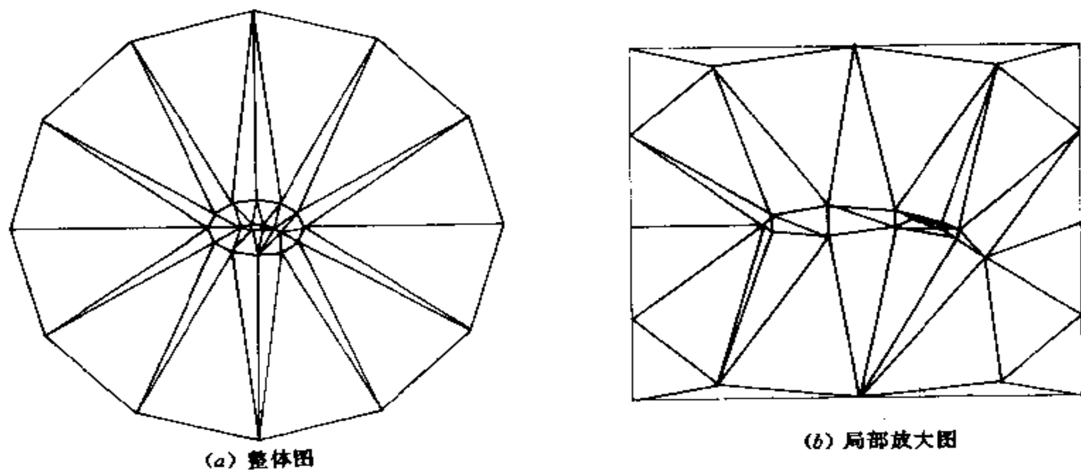


图 4-22　背景网格

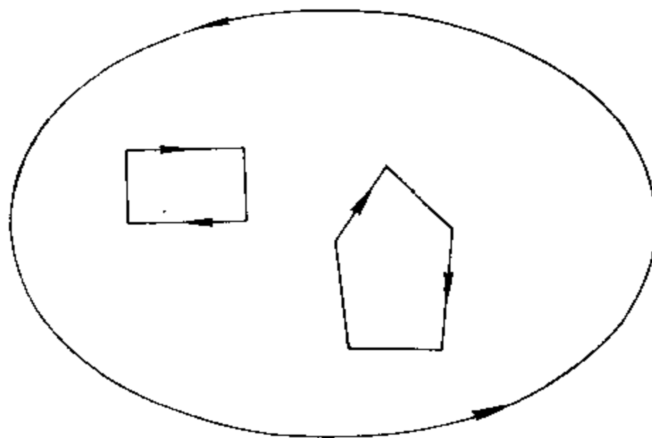


图 4-23　边界的定义

（三）推进生成三角形

初始化阵面形成以后，就可以根据有关规则推进生成节点和三角形了。在生成三角形的进程中，遵循如下步骤：

(1) 在阵面上选择作为基边的活动边。一般来讲，基边就取阵面向量中的最后一个元素。在图 4-24中，我们选取 AB 边作为基边。

(2) 假设 A 和 B 是选取的基边的两个端点，而边 AB 的中点为 M(如图 4-24 所示)。按照一定的方式对背景网格进行搜索，直到找出 M 点落在了哪个背景网格里面。由前面已经知道，背景网格上的三角形的每一个顶点，都有代表该点周围网格密度的尺度。M 点落在了哪个背景网格上，就利用该背景网格的三个顶点的尺度插值求出 M 点的尺度 δ。按如下定义确定长度 δ_1

$$\delta_1 = \begin{cases} \delta & \text{若 } 0.55 \times \overline{AB} < \delta < 2 \times \overline{AB} \\ 0.55 \times \overline{AB} & \text{若 } 0.55 \times \overline{AB} > \delta \\ 2 \times \overline{AB} & \text{若 } \delta > 2 \times \overline{AB} \end{cases}$$

根据长度尺寸 δ_1 确定点 C，点 C 在 AB 的垂直平分线上，C 到点 A 或点 B 的距离为 δ_1。

(3) 以点 C 为圆心，r 为半径（一般取 $r=3\times\overline{AB}$）作圆。找出阵面上落入该圆的节点。将这些节点按照其距离 C 点的远近排序。假设有 m 个点 a_1，a_2，…，a_m 落入该圆，则 a_1 为距离 C 最近的点。

(4) 确定 C 点是否应被加入到序列 a_m 中去。如果

$$\overline{Aa_1} < 1.5 \times \delta_1$$
$$\overline{Ba_1} < 1.5 \times \delta_1$$

则 C 点不应加到 a_m 中去，否则 C 点将被加到序列 a_m 的第一个位置上去，而其它的点顺次后移。

(5) 确定连接点。连接点是列表中满足如下两个条件的第一个点：

① 三角形 ABa_1 的内部不包含列表中的任意一点（C 点除外）；

② 线段 Ma_1 不与任意一条阵面上的边相交。

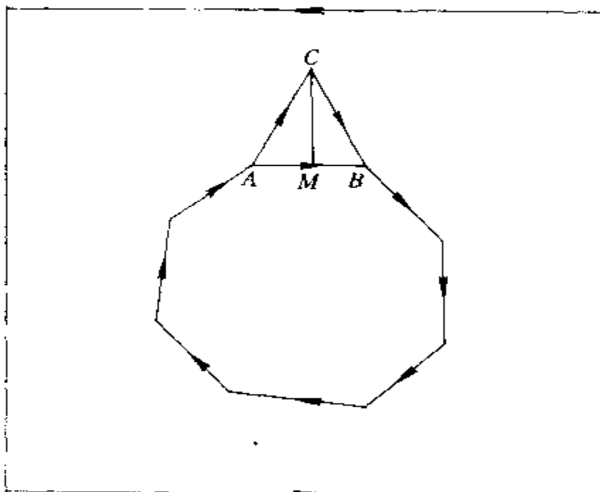


图 4-24　阵面的推进

(6) 形成新的元素。新形成的三角形将被贮存起来。如果选择了 C 作为连接点，则平面上产生了一个新的结点。更新阵面。

(7) 继续进行，直至阵面推至外边界，阵面上的点逐渐减小至零，则平面的三角化完成。

(四) 网格的优化

如上方法所生成的网格具有较高的质量，但在有些尺度变化较剧烈的地方，网格会有一些扭曲，可采用前面提到的 Laplacian 方法进行优化。

三、两种方法的讨论

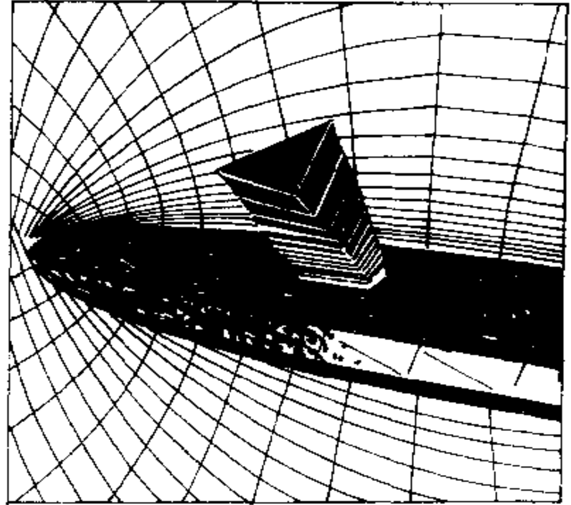
Delaunay 方法的优点是能得到尽可能等边的高质量三角形单元，也比推进阵面法的生成效率高[43]；但由于节点的产生和连接是彼此独立的，在连点过程中就有可能破坏原有的边界，即不能保证边界的完整性，因此在连点过程中必须对边界实行保护，或在连点后对被破坏的边界予以修复，这是 Delaunay 方法的最大弱点。推进阵面法的节点生成和三角形形成是同步的，推进是由边界向区域内部进行，无边界破坏问题，因而边界附近的网格质量较高。但此法对背景网格的依赖性大，如何生成背景网格是此法成败的关键之一。同时每推进一步仅生成一个单元，因而效率较低。鉴于两种方法都有优缺点，一些作者[40,44,45]尝试了用两种方法的结合来生成网格。

四、结构/非结构杂交网格

非结构网格虽然容易适应复杂外形，并具有其它一些优点，但相比结构网格也存在一些缺点，主要有：(1) 非结构网格方法需要较大的内存，因为必须记忆单元节点之间的关联信息，且在计算过程中必须为梯度项开设存贮空间，而且非结构网格不具备方向性，必须记忆各坐标轴方向的梯度分量，使所需内存大为增加。(2) 在非结构网格中进行流场计算需要更多的 CPU 时间，这不仅因为数据结构的随机性增加了寻址时间，更主要的是网格的非方向性导致梯度项计算工作量的增大。(3) 结构网格中成熟的流场解计算方法尚不能简单地用于非结构网格。(4)不易应用多重网格技

术。结构和非结构网格互补的优缺点推动了结构/非结构杂交网格的出现。目前文献中可见的杂交网格大致有两大类：

1. 针对粘流计算的杂交网格。Aftosmis M 等[47]讨论了不同形状的三角形单元和四边形单元对解精度的影响，发现在物面附近使用拉伸比大的三角形单元并不比四边形单元更精确，这是由于三角形单元的最大边造成的不好影响，为此建议在边界层区内清除不必要的对角边，形成四边形单元，从而构成了一种杂交网格。如二维计算时在近壁区生成贴体的结构网格，并使其外接大部分流场中的非结构网格[48]；三维计算时在物面附近生成截面为三角形的三棱柱形半结构网格，再与外流场中的非结构网格构成杂交网格[49～53]。采用三棱柱形半结构网格进行外部粘性绕流计算具有以下好处：(1) 计算效率高。这不仅因为在给定网格节点数时一般六面体的单元数仅为四面体的 1/5，边缘数目仅为 1/6，因而在流场解的计算中计算量将减少 4/5 或 5/6，而且三棱柱半结构网格的数据结构与二维三角形网格的相似，相比全非结构的四面体，对内存的需求将减少，查询计算时间也会减少。(2) 由于其离开物面方向的结构性和层次性，非常适合于边界层中的粘性项计算及薄层假设的采用和简单的 Baldwin-Lomax 湍流模型的使用。(3)由于在物面上仍保持非结构网格的特点，因此很适于复杂外形，并可方便地采用自适应技术构造网格而大大提高计算效率，减轻初始网格生成的工作量。所以这是结构网格和非结构网格一种很好的折衷。图 4-25 给出了三棱柱形半结构网格的示意图。在离开物面向外推进生成三棱柱半结构网格时，要很小心，避免网格线相交。


图 4-25　棱柱形网格

2. 针对多部件或多体复杂外形生成杂交网格的方法实际上是对重叠结构网格技术的一种补充，即先对多体中的每一个单体或复杂外形中的每一个子域生成贴体结构网格，再在相邻两子域的重叠区中挖洞，洞体由非结构网格来填充，实现相邻两网格间的通量守恒。“拉链网格(Zipper grid)”[54]和龙形网格(Dragon grid)[55]皆属此类。图 4-26 为构成“龙形网格”的示意图，其中图(a)为重叠网格中挖出的“洞区”，图(b)为用非结构网格填充洞区而成的“龙形网格”。图 4-27 给出了圆柱绕流的 Chimera 和 Dragon 网格的对比。

矩形网格是结构网格中最简单的一种，也是 CFD 中最早使用的计算网格。矩形网格中不必进行 Jacobian 矩阵的计算，具有比贴体网格计算更简单、更快捷的优点，其困难在于不好处理边界。因而最简单的一种杂交网格是由近物面的非结构网格和远离物面的矩形网格构成。文献[56]给出了一种进行无粘绕流计算的矩形与三角形(2D)/四面体(3D)的杂交网格。该网格充分利用非结构网格的灵活性模拟复杂外形，同时用矩形网格离散其他绝大部分区域，以克服非结构网格方法要求内存大和计算时间长的缺点。下面仍以二维为例简单介绍此类杂交网格的生成要点。

原则上讲，物面附近的非结构网格可用前面介绍过的两种方法之一来生成。考虑到非结构网格所占区域较小，大部分区域是矩形网格，因此采用一种较简单的方法——修正四叉树方法来生成。此方法能同时生成矩形网格和非结构网格，而且不必进行对相邻点、边的查询和边与边相交的判断，因而更简便、快捷。四叉树方法的基本思想是先用矩形网格覆盖流场，再将矩形划分为三角元，

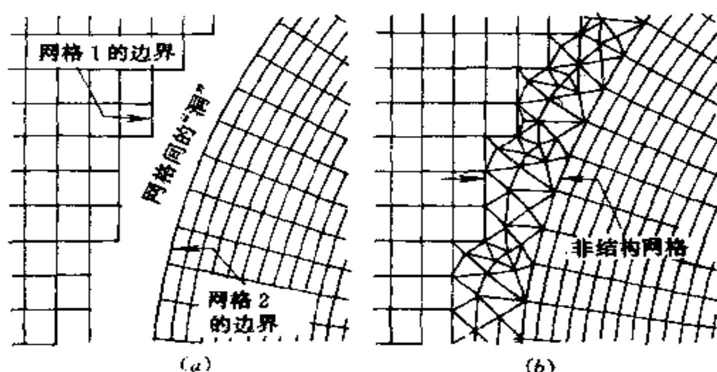
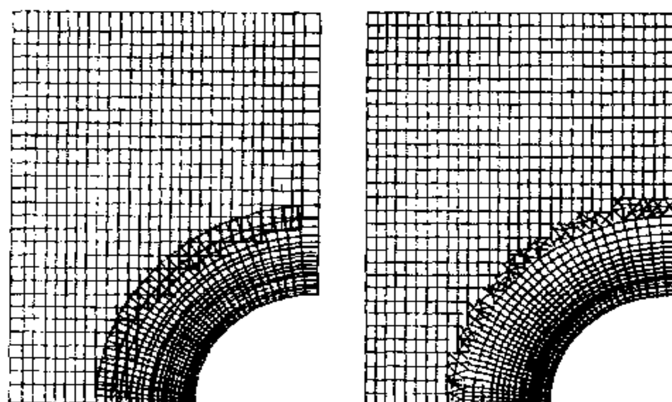


图 4-26　Dragon 网格的构成


图 4-27　绕圆柱网格的比较

对与流场边界相交的矩形进行特殊划分。具体过程为：

(1) 首先用矩形结构网格覆盖包括物体在内的整个计算域，同时建立四叉树数据结构[57]。

(2) 按四叉树数据结构，将靠近物面且物面曲率较大的区域或网格要求较密的区域的矩形网格再细分成四个子四边形。重复此做法，直到四边形分布达到所要求的空间步长为止。空间步长的控制可用矩形结构背景网格技术[46]。

(3) 若位于流场边界附近的四边形角点到物面的距离小于某一限定值(该四边形短边长的1/8)，则将此角点修正到物面上，形成修正的四边形。

(4) 对每一个四边形进行如下循环处理：

A. 如其四个角点均在流场内，且距物面一定距离以外，在物面附近细分四边形的过程中其边界未受到分隔，即四边形的边上无被分点(或称中心点)，则视其为一结构网格单元。

B. 如其四个角点均在流场内，且距物面一定距离以内，当边上无中心点时，将其划分成两个三角元，对角线的连接方式可随机选取。

C. 如其四个角点均在流场外，则舍弃该四边形。

D. 如其四个角点均在流场内，且边上有中心点，则在四边形中心引入一个额外的插点。连接此点与四边形的角点和边中心点构成多个三角元。

E. 若物面边界切割该四边形，对切割后余下的部分(多边形)应按不同情况处理。若仅剩三个

顶点，则它就是一个三角元；若剩有四个顶点，则连接距离较短的对角线而构成两个三角元；若顶点数多于四个，则将该多边形按 D 情况处理。

(5) 对生成的初始网格进行光顺处理(Laplacian 光顺方法)。

作为例子，图 4-28 和图 4-29 分别给出了绕 NACA0012 翼型的杂交网格示意图和在弯管内运动激波绕射计算的杂交网格示意图[56]。

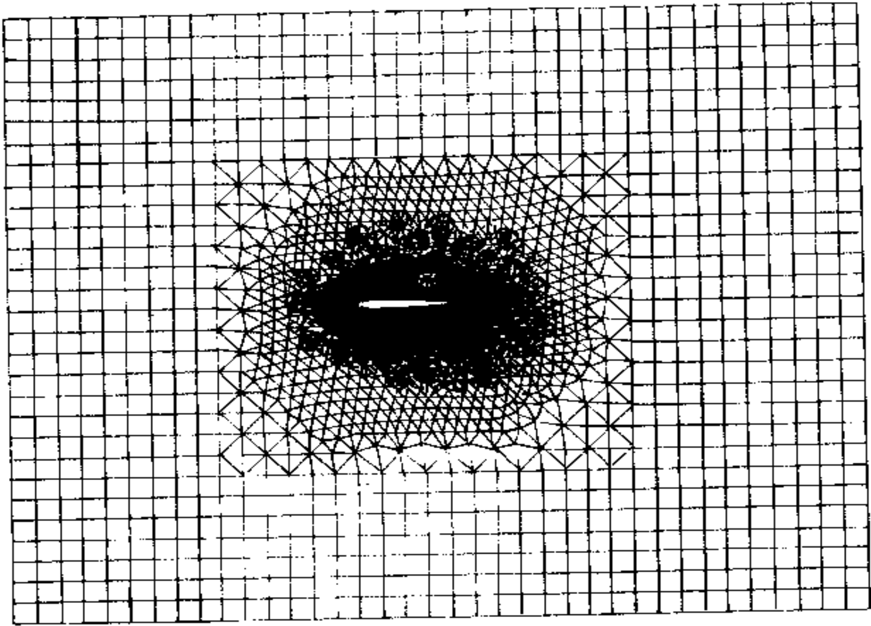


图 4-28 NACA0012 翼型绕流的混合网格

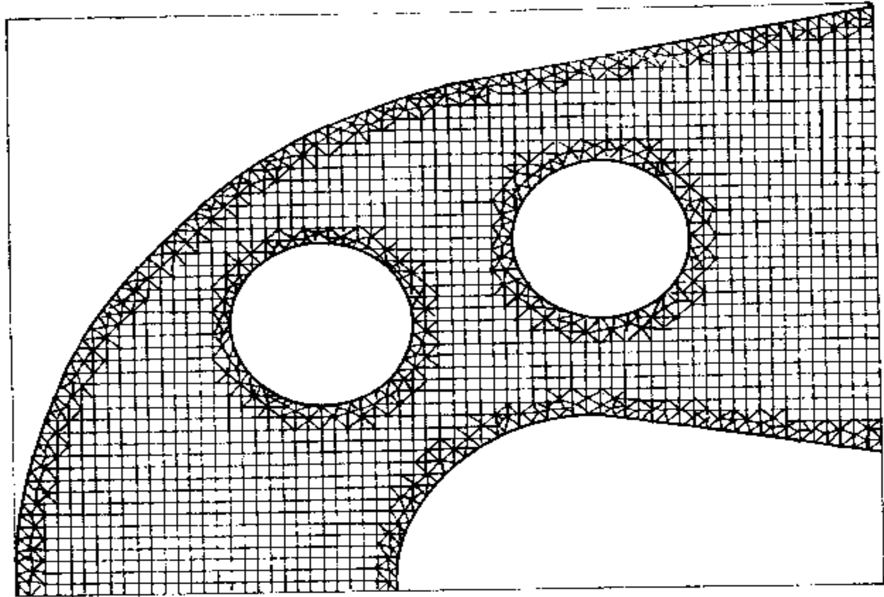


图 4-29 运动激波在弯管内绕射的混合网格示意图

流场计算时，在结构和非结构网格的接合区可将紧贴非结构网格的两层结构网格亦作为非结构网格看待(称交界区)。交界区的物理量按非结构网格中的算法更新。在求第二层与第三层结构

网格交界面处的通量时，非结构网格算法要求的梯度项由结构网格算法的差分直接给出。从第三层结构网格开始按结构网格中的算法计算。由于在交界区采用了数据共享技术，不像在重叠网格方法中需要插值，故保证了通量守恒。

为说明杂交网格的效率，表 4-4 和表 4-5 分别给出了绕 NACA0012 翼型跨声速流动和弯管内运动激波绕障碍物流动两种情况计算量的比较[57]。表中所占内存和关于 CPU 的数据皆取自 Digital Alpha Station 250 计算机，单位内存量=所占内存总量/单元数，单位 CPU 时间=CPU 时间/(单元数×迭代步数)。由表可见，尽管杂交网格的单元数较全三角形网格(全非结构网格)多，但其所占内存和所需的 CPU 时间反而更少；就单位内存量和 CPU 时间看，杂交网格确实具有很大的优越性，特别当非结构网格在杂交网格中所占比例较小时，CPU 时间的节省更为明显。

表 4-4　NACA0012 翼型绕流计算量的比较

	单元数	三角形网格所占比例	内存总量	单位内存量之比	每 200 步 CPU 时间	单位 CPU 时间之比
全三角形网格	15070	100%	5M	1.38	74s	1.78
杂交网格	19908	44.45%	4.8M	1.0	55s	1.0

表 4-5　运动激波绕障碍物流动计算量的比较

	单元数	三角形网格所占比例	内存总量	单位内存量之比	每迭代步 CPU 时间	单位 CPU 时间之比
全三角形网格	115676	100%	36M	1.49	10.68s	4.60
杂交网格	153443	8.85%	32M	1.0	3.08s	1.0

第五节　自适应笛卡尔网格

笛卡尔网格(矩形网格)是 CFD 计算中最早使用，也是最易生成的一种网格，但其较难处理好物面边界，因而不易较准确地满足边界条件。近年来人们开始采用自适应的笛卡尔网格来计算复杂几何形状的流场[58～60]，即在原始的均匀笛卡尔网格基础上根据物形特点或流场特点在局部区域内不断进行网格细化，实现精度符合要求、分布又是最合理的一种非均匀的笛卡尔网格。相比于结构网格和非结构网格，对笛卡尔网格实现自适应具有如下优点：

1. 不必先生成表面网格再生成空间网格，而可以一次性生成计算所需的网格，使网格生成过程简单、省时。

2. 相比贴体结构网格，不需要从物理空间到计算空间的转换，因而流场计算中不再需要计算 Jacobian 矩阵，使通量计算简单，节约计算时间。流场计算中实现自适应也较容易，较简单。

3. 相比非结构网格，数据结构和网格生成过程都相对简单，比较容易作自适应计算。

采用此种网格方法作流场计算，网格生成简单、省时，网格容易加密，可提高计算精度。由于必须进行自适应的网格细化，因而要求网格计算方法经济有效。相对于贴体的结构网格和非结构网格，它在描述外形的精度上要低一些，不可能做到完全贴体。为实现贴体，还必须对贴近物面的网格作特殊的处理。

一、方法的基本特点

1. 在任取外边界内的笛卡尔网格中嵌入物体，寻找物体与笛卡尔网格的交线(面)。在此过程中可形成三种网格单元：未被切割的物体外部网格单元(一般的笛卡尔网格)，被物面切割的网格单元和物体内部的网格单元。对最后一种网格单元不应作流场计算，应予删除。对于任意给定的物体外形，被切割的网格单元可能会有不同的形状和大小，要正确地确定它们，并在其中做有限体积的通量计算是不容易的，需仔细地处理。如有时被切割的网格单元很小，可导致计算格式的不稳定，就必须将这种小网格并入周围的网格单元[61]，或进行网格再构造[58]。

2. 网格生成和流场计算时必须进行自适应的网格细化和调整，包括：被切割网格单元的细化，以曲率变化为基础的网格细化和流场解要求的网格细化等三种细化。第一种细化是为了实现从流场外较粗网格到物面上精细网格的光滑过渡，以保证物面网格达到用户要求的精度。第二种细化是根据物面上两相邻网格单元的斜率变化，若超过规定的要求，如$\left|\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_1-\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_2\right|\geqslant 0.05$，则对此二网格单元及其相邻的单元都要细化，以保证物面曲率半径变化大处网格细的要求。图4-30为此种细化网格的示意图。第三种细化是根据流场解的结果，如相邻两网格单元的合速度差超过用户规定的限制(如5%)，则需对此二网格细化，以保证满足流场中梯度大处网格细的要求。当然这种细化应在解达到足够收敛程度时才进行。

3. 网格“光滑”。此方法的特点之一是引入了被切割的网格单元，因此可能出现具有“不理想”特性的网格单元，它们会使数据复杂化或使解蜕化，必须通过“光滑”处理消除这种网格的“不理想”特性。图4-31给出了8种“不理想”的例子，分别为：(1)相邻两网格单元的级别差大于1；(2)垂直于物体切割单元方向网格单元的级别差大于0；(3)通过外边界的网格单元级别差大于0；(4)三角形网格与其周围网格的级别差大于0；(5)网格中存在“空洞”；(6)一个网格单元中存在两个切割面；(7)在物体后缘网格级别差大于0；(8)物体太薄，其上、下表面处在相邻的两个单元之内。

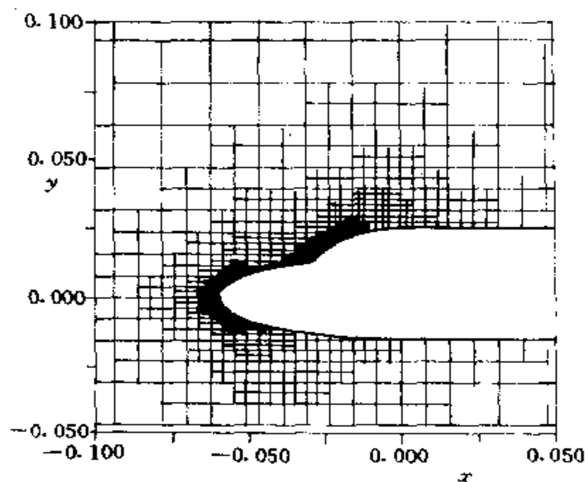


图4-30　网格细化示意图

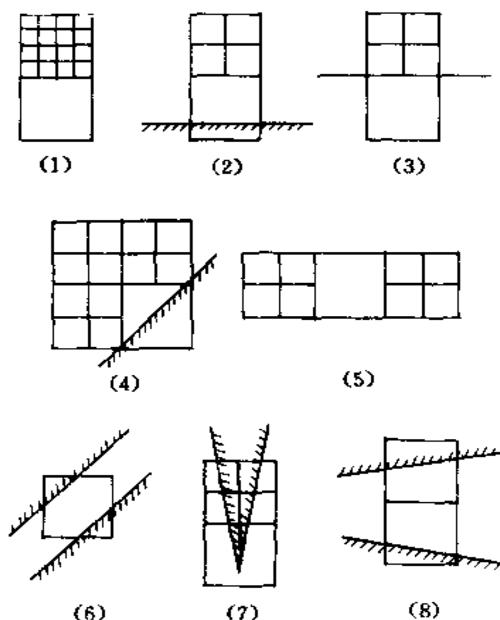


图4-31　不理想网格示意图

二、网格生成过程

1. 可采用下述方法生成计算网格：

(1) 根据求解域大小定义外边界。

(2) 寻访 CAD 生成的几何外形。

(3) 对包含物体或与物面相交的网格单元进行剖分。

(4) 寻找物体内部的网格单元并将其删除。

(5) 重复(2)至(5)，直到网格单元达到所要求的精度。

(6) 为使物面网格与几何表面完全一致，消除台阶，可将表面网格单元的一个角点移至物面。

(7) 最后对网格实行"光滑化"。

2. 上述生成过程包含如下基本特点：

(1) 数据结构一般采用四叉树，一个基本网格单元(称"双亲"网格)划分成四个下一级别的"子女"网格，图 4-32 表明了它们之间的关系。利用这种树形结构，在流场计算时可以很快找到互为关联的必要信息。存贮信息的确定取决于计算机的内存和计算速度。例如，对每一网格单元若不存贮其相邻的网格单元，则计算时间需增加 25%；但若存贮它们，需占 8 个整数型存贮单元。若存贮每一个网格单元在树形结构中的级别需占 1 个整数型存贮单元；若不存贮，则增加 15% 的计算时间。基于这种比较，可以存贮每一网格单元的级别，而不存贮其相邻的网格单元[58]。

(2) 判断空间网格单元是否与物面几何外形相交可有两种方法：一是对描述几何外形的每一个单元判断其是否与所指定的空间网格单元相交，但此法并不经济[60]。另一是 Bonet 和 Peraire [62]建议的方法，对描述几何外形的几何单元建立二叉树结构，判断无"子女"的几何单元是否与空间网格单元相交。具体做法是将网格单元和几何单元分别无因次于(0,1)，如图 4-33 所示，若其对角线的 x,y 分别满足：

$$
\begin{aligned}
&0 \leqslant x_{c_{min}} \leqslant x_{b_{max}}; x_{b_{min}} \leqslant x_{c_{max}} \leqslant 1; \\
&0 \leqslant y_{c_{min}} \leqslant y_{b_{max}}; y_{b_{min}} \leqslant y_{c_{max}} \leqslant 1
\end{aligned}
\tag{4-47}
$$

则两单元相交。

(3) 探测物体内部的网格单元，可将空间网格单元的角点作垂直投影，判断投影线是否与几何单元相交。若每条投影线切割物体的次数是奇数，则此网格单元是物体内的单元(图 4-34)。

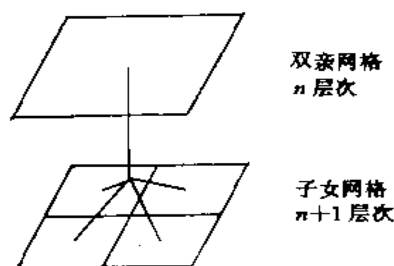


图 4-32 四叉树网格关系

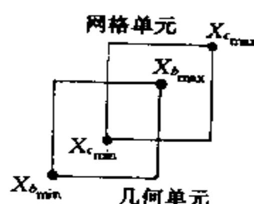


图 4-33 相交的判断

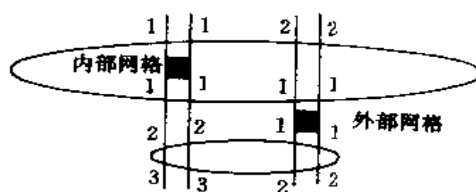


图 4-34 物体内单元的探测

三、各向异性的笛卡尔网格

上述讨论为各向同性剖分的自适应笛卡尔网格方法，适用于求解 Euler 方程，未考虑流场，特别是粘流流场，中壁面边界层各向异性的特点。Wu Z N[63]提出了一种各向异性加密网格的方法，

并结合有限差分方法，求解了可压缩性层流粘性流动的N-S方程。其基本原理可简述如下：

将网格按粗细分成不同的级别(以参数 l 表示)，最粗的网格对应于 $l=1$，网格越细 l 越大。从 $l=1$ 至 $l=l_{iso}$，采用各向同性加密，即将一个网格单元等分成4个单元；从 $l=l_{iso-1}$ 开始，在 x 方向和 y 方向分别加密。若以壁面曲率大小加密的原则为例，可

1. 寻找网格中贴近壁面第1至2层网格单元的集合 Q，如图4-35(a)中的1，2，3网格单元。

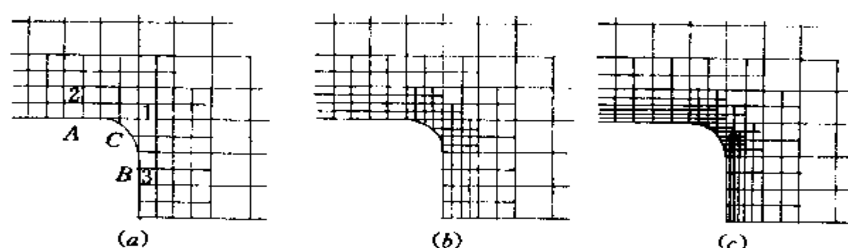


图4-35　壁面附近各向异性加密网格

2. 对 Q 中任何单元 q，寻找壁面上距离 q 最近的点 s(如 C，A，B)，计算 s 处壁面曲率 C_s 和单位向量 $\boldsymbol{n}_s$，计算 $C_s^{(x)}=\max(C_s|\boldsymbol{n}_s^{(x)}|,C_{inf})$ 和 $C_s^{(y)}=\max(C_s|\boldsymbol{n}_s^{(y)}|,C_{inf})$，其中 C_{inf} 是保证壁面有最小限度加密的给定值。

3. 对于 q，若曲率在某个方向的分量大于给定值 C_r，则在该方向加密。

4. 进入更细级的网格，重复上述(1)—(3)步。

图4-35(a)至4-35(c)分别为 $l=l_{iso}$，$l=l_{iso-1}$，$l=l_{iso+2}$ 级网格加密的示意图。对翼型和多段翼型的计算表明[63]，各向异性加密在保证与各向同性加密具有同样精度情况下，可大大减少网格点的数量(约50%～70%)。

第六节　结束语

分区结构网格的生成方法和分区(或并行)计算方法相结合是目前计算复杂外形绕流流场的主要方法，已积累了较多经验，计算技术也较成熟。分区结构网格生成的基础仍是单体贴体网格的生成方法。无论是对接或重叠分区网格将朝着减少工作量，实现自动生成和自适应加密，具有良好人机界面及可视化，具有与CAD良好的接口，强调更有效地数据结构等方面进一步发展。非结构网格和自适应笛卡尔网格各具独特的吸引力，近年来得到不同程度的重视和发展。结构和非结构网格互补的优缺点正推动着对结构/非结构杂交网格的探讨和研究，使之能对非常复杂的外形做到逼真的模拟。各种网格技术面临的挑战是要快速生成适用于粘流计算的高质量计算网格。

参考文献

[1] Thompson J F, Weatherill N P. Aspects of numerical grid generation: current and art. AIAA 93-3539

[2] Thompson J F, Warsi E U A, Mastin C W. Numerical Grid Generation. Elsevier Science Publishing Co., 1985

[3] Rizzi A, Erikson L E. Transfinite mesh generation and damped Euler equation algorithm for transonic flow around wing body configurations. AIAA 81-0999, 1981

[4] Sorenson R L. A computer program to generate two-dimensional grids about airfoils and other shapes by the use of Poisson's equation. NASA TM 81198, 1980

[5] Thomas P D, Middlecoff J F. Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations. AIAA J. 18:652-656,1979

[6] Hilgenstock A. A fast method for the elliptic generation of three dimensional grids with full boundary control. Num. Grid Generation in CFM'88, Pineridge Press Ld., pp 137-146,1988

[7] White J A. Elliptic grid generation with orthogonality and spacing control on an arbitrary number of boundaries. AIAA 90-1568

[8] Steger J L, Chaussee D S. Generation of body fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1:431-437,1980

[9] Steger J L, Rizk Y M. Generation of three dimensional body fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations. NASA TM 86753,1985

[10] Chan W M, Steger J L. A generized scheme for three-dimensional hyperbolic grid generation. AIAA 91-1588

[11] Labozzetta W F, Gatzke T D, Ellison S, Finfrock G P, Fisher M S. MCGS-Towards the complete grid generation system. AIAA 94-1923

[12] Yu T Y, Soni B K, Shih M H. CAGI: computer aided grid interface. AIAA 95-0243

[13] 张正科. 多部件复杂飞行器分块网格生成及其大迎角绕流场 Euler 方程分区解. 北京航空航天大学博士后研究工作报告,1997

[14] Zhang Zhengke, Zhu Ziqiang, Zhuang Fenggan. Grid generation of a complex practical aircraft and zonal solution of Euler equations for high incidence vortical flows over it. Chinese J. of Aeronautics,(10:161—167),1997

[15] Thompson J F. Composite grid generation code for general 3-D regions the EAGLE code. AIAA J. 26:271-272,1998

[16] Steinbrener J P, Chawner J R, Fouts C L. Multiple block grid generation in the interactive environment. AIAA 90-1602

[17] Remotigue M G, Hart E T, Stokes M L. EAGLEView: A surface and grid generation program and its data management. NASA CP 3143: 243-252,1988

[18] Soni B K, Thompson J F, Stokes M L, Shih M H. GANIE++,EAGLEView and TIGER:General and special purpose graphically interactive grid systems. AIAA 92-0417

[19] Sorenson R L, McCann K. A method for interactive specifications of multipleblock topologies. AIAA 91-0147

[20] Sorenson R L, McCann K. GRAPEVINE: grids about anything by Poisson's equation in a visually interactive network environment. NASA CP 3143:319-331,1992

[21] Boerstoel J W, Spekreijse S P. An informatin system for the numerical simulation of 3-D Euler flows around aircraft. Comp. Math. in Applied Mech. and Eng. 89:237-257,1991

[22] Spekreijse S P, Boerstoel J W, Vitagliano P L, Kuyvenhoven J L. Domain modelling and grid generation for multi-block structured grids with application to aerodynamic and hydrodynamic configurations. NASA CP 3143:207-229, 1992

[23] Dener C, Hirsch Ch. IGG-An interactive 3-D surface modelling and grid generation system. AIAA 92-0073

[24] Rill S, Becker K. Simulation of transonic flow over twin-jet transport aircraft. J. of Aircraft, 29:640-646,1992

[25] Shaw J A, Peace A J,May N E, Pocock M F. Verification of the CFD simulation system SAUNA for complex aircraft configuration. AIAA 94-0393

[26] Gatzke T D, LaBozzetta W F, Finfrock G P, Johnson J A, Romer W W. MACGS: A zonal grid generation system for complex aero-propulsion configurations. AIAA 91-2156

[27] Akdag V, Wulf A. Integrated geometry and grid generation system for complex configurations. NASA CP 3143:161-171,1992

[28] Peace D G, Stanley S A, Martin Jr F W, Gomez R J, Le Beau G J L, Buning P G, Chan W M, Chiu I T, Wulf A, Akdag V. Development of a large scale Chimera grid system for the space shuttle launch vehicle. AIAA 93-0533

[29] Dominik D, Wisneski J, Rajagopal K, Vuong S, Sikora J. Grid generation of a high fidelity complex multibody space shuttle mated vehicle. AIAA 93-0432

[30] GRIDPRO, TM/AZ 3000, userls guid and reference manual. Program Development Corporation, White Plains, NY, 1993

[31] Slotnik J P, Kandula M, Buning P G. Navier-Stokes simulation of the space shuttle launch vehicle flight transonic flowfield using a large scale Chimera grid system. AIAA 94-1860

[32] Benek J A, Buning P G, Steger J L. A 3-D Chimera grid embedding technique. AIAA 85-1523
[33] Benek J A, Donegan T L, Suhs N E. Extended Chimera grid embedding scheme with application to viscous flows. AIAA 87-1126
[34] Lomard C K, Venkatapathy E. Implicit boundary treatment for joint and disjoint patched mesh systems. AIAA 85-1503
[35] Mastin C W, McConnaughey H V. Computational problems on composite grids AIAA 84-1611
[36] Bowyer A. Computing Dirichlet tesselations. Computer J. 24:162-167,1981
[37] Watson D F. Computing the n-dimensional Delaunay tesselation with application to Voronoi Polytopes. Computer J. 24: 167-172,1981
[38] Jameson A, Baker T J, Weatherill N P. Calculation of inviscid flow over a complete aircraft. AIAA 86-0103
[39] Yerry M A, Shephard M S. Automatic three dimensional mesh generation by the modified octree technique. Int. J. for Num. Meth. in Eng. 20:1965-1990,1984
[40] Mavriplis D J. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness. AIAA 93-0671
[41] Marcum D L, Weartherill N P. Unstructured grid generation using iterative point insertion and local reconnection. AIAA J. 33:1619-1625,1995
[42] Lohner R, Parikh P. Generation of three dimensional unstructured grids by the advancing front method. Int. J. for Num. Meth. in Fluids 8:1135-1149,1988
[43] Spragle G S, McGrory W R, Fang J. Comparison of 2-D unstructured grid generation techniques. AIAA 92-0726
[44] Merriam M L. An efficient advancing front algorithm for Delaunay triangulation. AIAA 91-0792
[45] 尹幸愉,吴志磊,朱自强. 二维非结构网格的可压缩欧拉方程流场解. 第八届全国计算流体力学会议论文集 393-398, 1996
[46] Pirzadth S. Structured background grids for generation of unstructured grids by advancing front method. AIAA J. 31: 257-265,1993
[47] Aftosmis M, Gaitonde D, Tavares T S. Behavior of linear reconstruction techniques on unstructured meshes. AIAA J. 33:2038-2049,1995
[48] Koomullil R P, Soni B K, Huang C T. Navier-Stokes simulation on hybrid grids. AIAA 96-0768
[49] Nakahashi K. A finite element method on prismatic elements for the three dimensional Navier-Stokes equations. Lecture Notes in Physics, 323:434-438,1988
[50] Nakahashi K. Adaptive prismatic grid method for external viscous flow computations. AIAA 93-3314
[51] Kallinderis Y, Ward S. Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation of complex geometries. AIAA 93-0669
[52] Parthasarathy V, Kallinderis Y, Nakajima K. Hybrid adaption method and directional viscous multigrid with prismatic-tetrahedral meshes. AIAA 95-0670
[53] Venkatakrishnan V. Perspective on unstructured grid flow solvers. AIAA J. 34:533-547,1996
[54] Chan W U, Buning P G. Zipper grids for force and moment computation on overset grids. AIAA 95-1681
[55] Kao K H, Liou M S. Advance in overset grid schemes: from Chimera to Dragon grids. AIAA J., 33: 1809-1815,1995
[56] 张来平. 非结构网格、矩形/非结构混合网格复杂无粘流场的数值模拟. 中国空气动力研究和发展中心博士学位论文, 1997
[57] Löhner R. Some useful data structures for the generation of unstructured grids. Comm. Appl. Num. Meth. 4: 123-135,1988
[58] Zeeuw D De, Powell K G. An adaptively refined Cartesian mesh solver for the Euler equations. J. of Comp. Phys. 104, 56-68,1993
[59] Quirk J J. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrary complex two-dimensional bodies. Computers & Fluids, 23:125-142,1994
[60] Smith R J, Johnston L J. Automatic grid generation and flow solution for complex geometries AIAA J 34:1120-1124, 1996
[61] Clarke D K, Salas M D, Hassan H A. Euler calculations for multielement airfoils using Cartesian grids. AIAA J. 24: 353-358,1986
[62] Bonet J, Peraire J. An alternative digital tree (ADT) algorithm for 3-D geometric searching and intersection problems. Int. J. for Num. Meth. in Eng. 31:1-7,1991
[63] Wu Z N. A gernuinely second order accurate method for viscous flow computations. ICNMFD 15, Monterey, U. S. A. June, 1996

第五章　湍流模型及其对数值模拟的作用

第一节　复杂流动的湍流模型

自然界和科学与工程问题中存在的流动现象绝大多数是湍流现象。众所周知，湍流问题一直是流体力学中一个重要的难题，虽经流体力学工作者，包括许多伟大学者在内，长达100多年的艰苦奋斗，其基本机理至今仍未完全弄清，仍不可能清楚地和准确地描述并定量地给出各类复杂湍流流动的运动特性。“湍流”一书[1]全面地总结和介绍了到目前为止湍流研究的各方面，读者可从中了解到湍流的基础知识及其进展。我们在讨论复杂流动的数值模拟时，自然也离不开如何模拟湍流现象的问题。

回顾计算流体力学的发展，特别是活跃的80年代，不仅提出和发展了一大批高精度、高分辨率的计算格式，从主控方程看相当成功地解决了Euler方程的数值模拟，可以说Euler方程数值模拟方法的精度已接近于它有效使用范围的极限；同时还发展了一大批有效的网格生成技术及相应的软件，具体实现了工程计算所需要的复杂外形的计算网格；且随着计算机的发展，无论从计算时间还是从计算费用考虑，Euler方程都已能适用于飞行器设计的实践。在此基础上，80年代还进行了求解可压缩雷诺平均方程及其三维定态粘流流动的模拟。可以预计，90年代将开始一个非定常粘流流场模拟的新局面，这里所说的粘流流场具有非定常、大迎角，即存在分离流动的特点，显然需要继续探求更高精度的计算方法和更实用可靠的网格生成技术。但可能更为重要的关键性的决策将是，对湍流流动如何模拟——采用各种简化模型，如目前已有的简化模型、雷诺应力封闭模型(RSM、大涡模拟(LES))等，还是直接数值模拟湍流(DNST)。

湍流模式理论或简称湍流模型，就是以雷诺平均运动方程与脉动运动方程为基础，依靠理论与经验的结合，引进一系列模型假设，而建立起的一组描写湍流平均量的封闭方程组。最早的模型化思想是由Boussinesq在1872年提出的，即用涡粘性系数来模拟雷诺应力，后经一些著名流体力学家，如Prandtl，Taylor，Von Karman等的工作奠定了其基础理论；在此基础上，不断应用从实验中获得的数据而逐渐建立了各种关于雷诺应力的模型假设，使雷诺平均运动方程得以封闭。

最初的和最简单的湍流模型只考虑了一阶湍流计算统计量的动力学微分方程，即平均方程，没有引进高阶统计量的微分方程，因而称之为一阶封闭模式或零方程模型。它们在开始都只被用来计算湍流边界层，后逐渐发展而可用于计算N-S方程。目前常用的零方程模式有Cebeci-Smith[2]和Baldwin-Lomax[3]模式，前者适用于湍流边界层，后者则可用于N-S方程计算。此两模型已在工程计算中得到广泛应用，其准确度和可靠性也得到了较多实验数据的验证。实践证明，对于接近平衡状态的平面或轴对称湍流边界层，C-S模型具有工程应用的足够精度，但对于逆压梯度或顺压梯度很大的非平衡湍流边界层及接近分离区的流动，其精度就不好了。B-L模型是在C-S模型的基础上加以改进而得到的，较之C-S模型，B-L模型有如下两个优点：(1) 由于采用涡的分布而不是速度梯度来确定尺度因子，可避免计算边界层厚度，故不仅适用于边界层计算，还适用于N-S方程的计算；(2) 由于外层的改进，B-L模型还可适用于具有小分离气泡的流动的计算。一般来说，对附体流动的计算，零方程模型的精度并不比更复杂的二方程模型差。

为进一步改善湍流模型，出现了考虑所有二阶关联量的雷诺应力模型(RSM)，这是一种微分模型。在此模型的框架下，首先写出雷诺应力$\overline{u_iu_j}$的动力学微分方程，然后对方程中出现的湍流扩散、分子扩散、产生、耗散、压力-变形等诸项模型化，就得到了常用的模型化后的雷诺应力方程。

$$\frac{D\overline{u_iu_j}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_k\frac{k^{2①}}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial x_l}+\nu\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial x_l}\right]+P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

$$-C_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k)-C_2(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_4) \tag{5-1}$$

相应的湍流动能 k 的方程则为：

$$\frac{Dk}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_l}+\nu\frac{\partial k}{\partial x_l}\right]+P_k-\varepsilon \tag{5-2}$$

其中经验常数可取 $C_k=0.09\sim0.11$，$C_1=1.5\sim2.2$，$C_2=0.4\sim0.5$。

上述雷诺应力模型方程中还包含着一个未知量 ε——湍能耗散率，因此还需建立一个关于 ε 的方程，因已有了可用 k 表示的湍流速度尺度，所需的只是一个标量的湍流长度尺度或时间尺度。为此，首先建立湍能耗散率 ε 的微分方程，再对其中各项进行一系列的模型化，最后可得：

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}+v\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right]-C_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{l}\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}-C_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{5-3}$$

其中 $C_\varepsilon=0.07\sim0.09$，$C_{\varepsilon_1}=1.41\sim1.45$，$C_{\varepsilon_2}=1.9\sim.192$。

由此可见，完整的雷诺应力模型包括平均运动的 1 个连续方程和 3 个动量方程。雷诺应力的 6 个方程，k 方程和 ε 方程，总共由包含 12 个未知量的 12 个微分方程构成封闭的方程组。如还要计及传热，则需计算温度或其它有关标量的分布，就还要再加上 1 个平均温度方程和 3 个$\overline{u_i\theta}$的模型方程，总共 16 个方程。对于一般工程中的湍流流动问题，这个方程组实在是太庞大了；对于复杂流动，若要求解此方程组，就目前已达到的计算机水平，无论是从计算时间或费用来说，都是不太可能的事。

为减少计算工作量，又相继提出了多种简化模型。

在进一步简化的模型中，人们干脆放弃了给雷诺应力$\overline{u_iu_j}$或$\overline{u_i\theta}$建立方程的打算，而又回到了 Boussinesq 的涡粘性模型上来，即令

$$-\overline{u_iu_j}=\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}k \tag{5-4}$$

其中涡粘性系数应用 k 和 ε 表示。根据量纲分析可得

$$\nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{5-5}$$

这样，k，ε 用方程(5-2)和(5-3)来求解，经验常数则通过实验来确定，常用的值为 $C_\mu=0.09$。这样建立的模型简称 k-ε 模型。由于其中除用到平均运动的方程外，只用到了 k 和 ε 的两个微分方程，故它是二方程的模型。此模型是目前应用得很广泛的一种湍流模型。

在选择湍流长度尺度或时间尺度时，若不取 ε，而取其它标量，如 kl (Rotta[4]；Rodi 和 Spalding[5])，$\frac{k^{3/2}}{l}$ (Davidov[1])或湍流“频率”$\frac{k^{1/2}}{l}$ (Saffman[6]；Wilcox 和 Traci[7])等，则可分别形成 $k-kl$，$k-\omega$ 等的二方程模型。

属二方程模型范畴的有众所周知的 Jones 和 Launder[8]模型，Rodi 和 Spalding[5]模型，

① 由于未能在国标中找到湍流动能的相应符号，故此处暂用传统符号 k 来表示。

Wilocox-Rubesin[9,10]模型等。

《湍流》一书给出了雷诺应力模型的推导和几种二方程模型的具体公式。

再进一步简化湍流模型，可舍去二方程模型中的 ε 方程而只保留 k 方程，将方程中的 ε 用 $\frac{k^{3/2}}{l}$ 替代，这就是一方程模型。l 可看作混合长度，必须另作假设。一般地，l 随具体流动而有不同的形式，不可能给出普遍有效的统一公式。方程模型存在多种形式，如 Bradshaw 等[11]所给出的适用于边界层计算的一方程模型放弃了涡粘性概念，直接给出边界层内雷诺剪应力 $\overline{u'v'}$ 所满足的微分方程；又如下面我们将要介绍的最近发展的某些一方程模型也不是简单地采用 k 方程的模型。

由上述简单的介绍可以看出，并可期望，完整的雷诺应力模型要比其简化的模型或更简单的零方程代数模型有更高的模拟准确度和更广泛的适用范围，更适合于复杂流动的数值模拟。同时也可看到，由于该模型的复杂性，计算工作量则远高于简化模型的计算量。由于计算机水平的局限，至今计算复杂三维湍流流动的算例还不多，尚不足以对各种模型的收益/代价比做出明确肯定的结论，因为衡量一个湍流模型的优劣，除要测定其用于各种不同流动时能在不调整其中的常数项前提下以多大精度描述流动外，还要测定其计算所需的费用及处理问题所需的时间，后者对于工程应用尤为重要。

尽管雷诺应力模型的计算相当复杂，但对湍流流动的模拟仍存在相当的失真，这是由于在推导这些动力学方程时，对方程中的各项作了大量的模型化，而在构造模型时我们又对许多未知项知之甚少，有许多量至今还没有直接的测量数据可作参考，甚至还不知道应如何测量以获取必要的信息。由于目前对湍流的基本机理尚不清楚，因而在进行模型化时，除依靠已有的理论基础知识及必要的分析手段，如量纲分析等以外，很大程度是凭藉所做的假设，而假设的主观臆测程度很大，遂使模型的可靠性差，与实际流动中的物理规律相差甚大。

人们仍在不断追求更高级、更可靠的湍流模型。通过近 20 年～30 年的研究，人们逐渐认识到，在湍流流动中除存在许多随机性很强的小尺度涡运动外，还存在一些组织得相当好的大尺度涡结构，它们有较规则的旋涡运动图形，它们的形态、尺度对同一类型的湍流流动具有普遍性，而且它们对湍流中的雷诺应力和各种物理量的输运过程做出主要贡献。大涡与平均流动之间存在着强烈的相互作用。小涡主要是通过大涡之间的非线性相互作用间接产生的，它与平均运动或流场边界形状几乎没有关系，因而可近似地看作是各向同性的。它对平均运动也只有轻微的影响，主要是起粘性耗散作用。于是人们设想，可否只将比网格尺度大的大涡运动通过数值求解 N-S 方程直接计算出来，而将比网格尺度小的小涡运动对大尺度运动的影响通过建立模型来模拟，因为如前所述，小尺度涡运动受流动边界条件的影响甚小，且近似是各向同性的，这就有可能找到一个广泛适用的模型；同时，因为流动中的大部分质量、动量或能量的输运主要来自大涡运动，这部分贡献已直接计算出来，需要通过模型提供的部分只占很小的比重，这使总体结果对模型的依赖不会太敏感，显然会提高计算结果的可信程度。基于这种思想产生了大涡模拟(Large Eddy Simulation，LES)。在大涡模拟(LES)中，首先要通过某种滤波方法将包括脉动运动在内的湍流瞬时运动分解成大尺度运动和小尺度运动两部分。大尺度量通过数值求解滤波后的 N-S 运动微分方程获得，小尺度运动对大尺度运动的影响将在上述方程中表现为类似于雷诺应力那样的应力项，称为亚格子雷诺应力，将通过建立模型来模拟。将模型化的亚格子雷诺应力项代入滤波后的 N-S 方程就得到大涡模拟方程，其形式与普通雷诺平均运动方程一样。对于亚格子雷诺应力也可推导出其遵循的动力学方程，其结果与一般模式理论中的雷诺应力方程极其相似，名称也类同，但具体内容则不尽相同，方程中所有的项都需建立模型——亚格子尺度模型。目前大涡模拟中所用的亚格子尺度几乎完全沿袭了一般

模式理论中的思想，如有涡粘性模型和二阶封闭模型，包括简化的一方程、二方程模型，以及完全的雷诺应力模型等。大涡模拟方面的工作目前做得还不多，已做的较多集中于气象学中的流动问题或基础性研究和简单的流动问题。对 LES 的详细讨论和推导，可参阅“湍流”一书及有关的专门文献。

模型化总是存在缺陷驱动人们寻找更好的解决湍流问题的途径。计算机规模和速度的飞跃发展则为人们提供了一种新的途径。绝大多数人都认为，包括脉动运动在内的湍流瞬时运动也服从 N-S 方程，而 N-S 方程本来就是封闭的，不需要建立模型，由此提出了不引入任何湍流模型，直接数值求解完整的三维非定常 N-S 方程，对湍流的瞬时运动进行直接数值模拟，对感兴趣的各种统计平均量可通过对瞬时量的平均运算取得的方法，这就是直接数值模拟湍流（Direct Numerical Simulation Turbulence-DNST）。这种方法显然有很多优点，如精确、可提供流场的全部信息、可实现实验室中很难做到的流动条件的控制，且比进行实验更为经济等。但其计算量却非常之巨大，受到计算机速度和容量的局限。目前国际上正在做的直接数值模拟湍流还只限于较低雷诺数（$Re\approx200$）和有简单几何边界条件的问题，主要用于进行湍流的基础研究，如发现新结构，揭示新机理，提供新概念，检验和改进湍流模型等。

上述简要说明和讨论清楚地表明，为了实现三维非定常、大迎角的粘流流场的数值模拟，其关键性决策是何等重要又何等不易。应该说明的是，无论是大涡模拟还是直接数值模拟，主要的困难不仅在于计算机的限制，也还存在方法本身的问题，因此无论决策是采用模型化还是采用直接数值模拟，都有待于湍流工作者和数值计算工作者的密切配合，共同努力。据笔者所见，限于目前及短期内计算机的发展水平，尚不可能实现直接数值模拟复杂的湍流流动，因而短期内还不可能对工程问题中的复杂流动作直接数值模拟，但可以在理论上和方法上继续用大涡模拟和直接数值模拟方法对简单边界条件的流动作深入的研究和探讨，一方面完善方法，促使其将来能应用于复杂流动中去；另一方面，对湍流机理作进一步的探索，以检验、改进和构造湍流模型并尽快提出更好的湍流模型。与此同时，对已有的简化湍流模型做更多的对比实际流动的检验，找出各模型的应用范围与不足，并加以改进，提出新的简化湍流模型（如正在发展的“重整化群（RNG）”模型）来解决工程实践中对复杂流动数值模拟的迫切需要。只有依靠这两方面的共同努力，才能真正开创一个数值模拟三维、非定常、大迎角粘流流场的新纪元。

第二节　简化湍流模型及其发展

一、Baldwin-Lomax (BL)模型[3]

直到目前，在复杂流动的数值模拟（N-S 方程）中所使用的皆是简化的湍流模型，包括零方程、一方程和二方程模型，其中尤以零方程——BL 模型使用更为广泛。

BL 模型与 CS 模型相似，是一个二层模拟，其涡粘性系数的假设为：

$$\mu_t=\begin{cases}(\mu_t)_{内}=\rho(ky)^2[1-exp(-y^+/A^+)]^2|\omega| & y\leqslant y_c\\(\mu_t)_{外}=KC_{cp}\rho F_{wake}F_{kleb}(y) & y>y_c\end{cases}\tag{5-6}$$

其中 y 是距壁面的法向距离，y_c 是内，外两层具有相同 μ_t 值的点与壁面的法向距离，

$$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$y^+=\frac{\rho_w u_\tau y}{\mu_w}=\frac{\sqrt{\rho_w T_w}\cdot y}{\mu_w}$$

$$F_{wake} = \min(y_{max} \cdot F_{max}, C_{wk} y_{max} u_{dif}^2 / F_{max}) \tag{5-7}$$

F_{max}是函数 $F(y)=y|\omega|[1-\exp(-y^+/A^+)]$的最大值，$y_{max}$即为 F_{max}时的 y 值。

$$F_{kleb}(y) = [1 + 5.5\left(\frac{C_{kleb} \cdot y}{y_{max}}\right)^6]^{-1}$$

u_{dif}是在给定 x 站位处的速度最大值与最小值之差，即

$$u_{dif} = (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})_{max} - (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})_{min}$$

转捩对湍流的影响通过下述方法实现，即当计算的 μ_t 小于某一给定值时，令 $\mu_t=0$，亦即若 $(\mu_t)_{max,剖面}<C_{MUTM}\mu_\infty$时，令 $\mu_t=0$。各常数值为：$A^+=26$，$C_{cp}=1.6$，$C_{kleb}=0.3$，$C_{wk}=0.25$，$k=0.4$，$K=0.0168$(Clauser 常数)，$Pr=072$，$Pr_t=0.9$，$C_{MUTM}=14$。

正如上节所述，BL 模型较适合于平衡状态的湍流流动，包括附着流动，或具有较小分离气泡的分离流动。

Degani 等[12]在研究三维炮弹型物体的超声速湍流流动中发现，采用 BL 模型，在小迎角(附着流)时，计算结果与实验结果很一致。但在大迎角下(即存在横向分离时)，两者不一致。对有横向分离涡存在的流场，用 BL 模型计算 y_{max}和 F_{max}时发生了困难。图 5-1 给出在两个周向角位置处(相应于迎风附着流和背风分离流)的 $F(y)$变化情况，由图可见，在分离流动中出现了 $F(y)$两个峰值，第二个峰值是由横向分离涡造成的且大于第一个峰值，若按 BL 模型的规定取最大值(第二个峰值)则将造成计算的 F_{wake}及$(\mu_t)_外$太大而使计算的整个流场与实际流动相距甚远。因此，Degani 等建议，在任何周向角位置处皆取第一个 $F(y)$峰值，这样计算 F_{wake}与$(\mu_t)_外$后的流场计算结果与实验结果很一致。图 5-2 给出了压强分布的计算值与实验值的比较，由图可见，对于附着流动，修改前后的 BL 模型都取得了与实验结果一致的计算结果(图(a))，对于有横向分离涡的流动，只有修改后的 BL 模型才能取得良好的结果(图(b))。

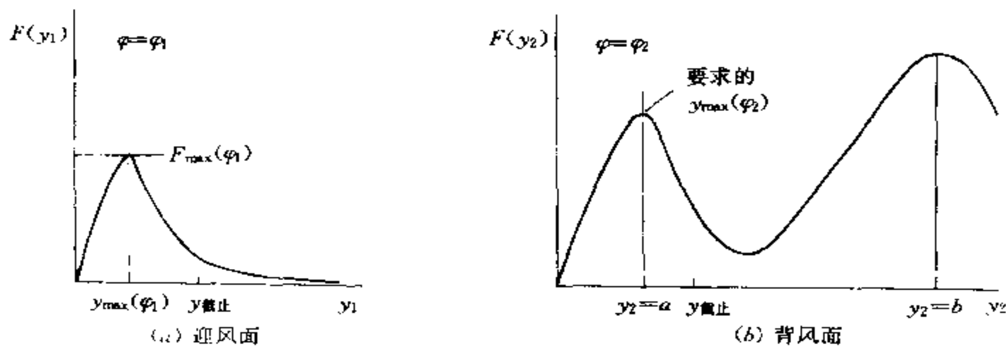
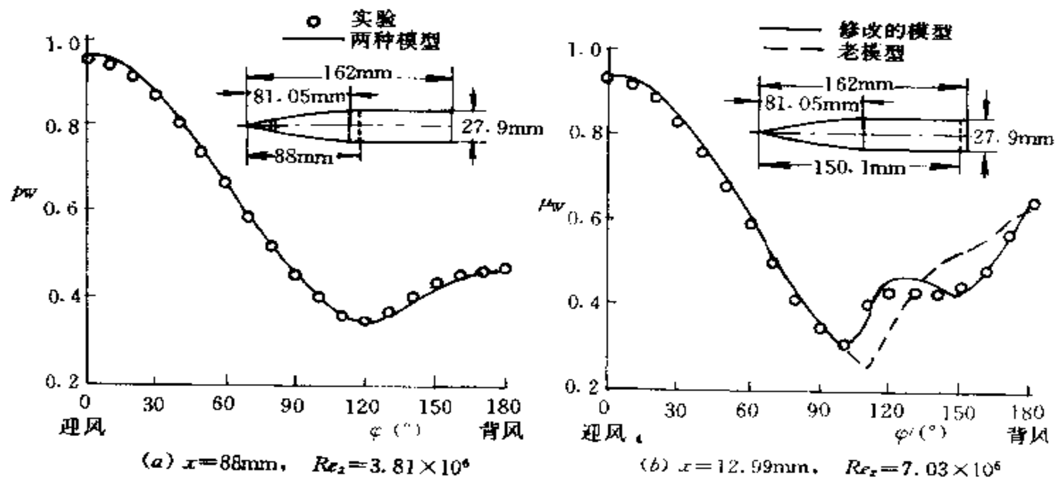


图 5-1 大迎角时 $F(y)$的分布

二、Johnson-King (JK)非平衡代数模型

为了能计算具有较强压强梯度，特别是较强逆压梯度的非平衡湍流边界层，Johnson-King 于 1985 年提出了一个非平衡代数模型[13]。该模型仍采用涡粘性假设，把涡粘性的分布与最大剪切应力连系在一起。内层涡粘性分布与外层涡粘性分布用一个指数函数作光滑拟合，外层涡粘性系数作为一个自由参数，由描述最大剪切应力沿流向变化的常微分方程来确定，此常微分方程是由湍流动能方程导出的，故此模型又称为半方程模型。JK 模型虽然仍采用涡粘性假设，却包含有雷诺应力模型的特点。由于求解常微分方程比一方程、二方程模型中求解偏微分方程要简单、省时得多，故用



(a) x=88mm, $Re_x=3.81\times10^6$　　(b) x=12.99mm, $Re_x=7.03\times10^6$

图 5-2　尖拱-圆柱物体周向压强分布 $Ma_\infty=3.0, \alpha=10.4°$

JK 模型的工作量只略高于通常平衡状态的零方程代数模型的工作量。可见，JK 模型是一个很有特点的湍流模型。

（一）JK 模型的要点

1. 涡粘性的假设

采用涡粘性假设，并将涡粘性系数表为最大剪切应力的函数，同时内、外层涡粘性系数（$\nu_t=\nu_{ti}$ 和 $\nu_t=\nu_{to}$）之间的光滑过渡通过

$$\nu_t = \nu_{to}[1-\exp(\nu_{ti}/\nu_{to})] \tag{5-9}$$

式实现，并将 ν_t 表为 ν_{to}的函数。

其中内层涡粘性不再如 CS 和 BL 模型中那样假定为$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$的函数，而假定为最大剪切应力——$\overline{u'v'}_m$ 的函数（下标 m 表示最大值），即

$$\nu_{ti} = D^2ky(-\overline{u'v'}_m)^{1/2} \tag{5-10}$$

其中 D 为阻尼项，$D=1-\exp[-\rho_w yu_T/(A^+\mu_w)]$，$u_T$ 是速度尺度，取为$(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$。考虑到在近壁区涡粘性是 y 的函数而非 y^2 的函数，故取 $A^+=15$，而非如 CS 模型中的 26。

外层涡粘性 ν_{to}假设为

$$\nu_{to} = \text{Const.}\cdot\Gamma_{JK} = 0.0168\rho q_\delta\delta^*\Gamma_{JK}\sigma \tag{5-11}$$

其中 $\delta^*=\int_0^\delta(1-q/q\delta)dy$；$\Gamma_{JK}$ 是 Klebanoff 的间歇因子函数，即 $\Gamma_{JK}=\frac{1}{1+5.5(y/\delta)^6}$；常数 σ 是模型的一个参数，连系着涡粘性分布(5-9)和最大剪切应力变化方程，即要求满足下述关系式：

$$\nu_t|_m = \frac{-\overline{u'v'}_m}{\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|_m} = \frac{(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}}{|\partial\bar{u}/\partial y|_m}(-\overline{u'v'}_m)^{1/2} \tag{5-12}$$

长度尺度　　速度尺度

这意味本模型以最大剪切应力$(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$作为速度尺度，将涡粘性系数表示为$(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$的函数。并通过$(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$的一个常微分方程来确定涡粘性系数。可见，这一封闭模型非常强烈地依赖着雷诺剪切应力。

2. 最大剪切应力常微分方程的建立

假设流线 s 与 x 很接近，y 近似垂直于 s，则不可压边界层最大湍流动能 k_m 的方程可写作：

$$\mu_m \frac{\mathrm{d}k_m}{\mathrm{d}x} = -\overline{u'v'}_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\Big|_m - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{p'v'}}{\rho} + \frac{1}{2}\overline{q^2 v'}\right)\Big|_m - \varepsilon_m \tag{5-13}$$

对流　　　产生　　　　扩散　　耗散

若采用质量平均，此方程亦适用于可压缩流动。

为简化上述方程，定义耗散长度尺度 $L_m = (-\overline{u'v'}_m)^{2/3}/\varepsilon_m$ 并假设 $(-\overline{u'v'}_m/k_m) = a_1 =$ 常数，一般取 0.25，于是上述湍流动能方程变为

$$(-\overline{u'v'}_m)^{1/2} = L_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\Big|_m - \frac{L_m}{(-\overline{u'v'}_m)} D_m - \frac{L_m \bar{u}_m}{a_1(-\overline{u'v'}_m)} \frac{\mathrm{d}(-\overline{u'v'}_m)}{\mathrm{d}x} \tag{5-14}$$

扩散作用　　　对流作用

其中 D_m 表示湍流扩散项。L_m 在内层和外层可分别表示为

$$L_m = 0.4 y_m \qquad y_m/\delta \leqslant 0.225$$
$$L_m = 0.09\delta \qquad y_m/\delta > 0.225$$

$L_m \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|_m$ 项可被看作是对流与扩散作用可以忽略不计时的最大剪切应力，亦即平衡状态的最大剪切应力 $(-\overline{u'v'}_{m,eq})^{1/2}$，可由平衡状态的涡粘性分布来确定：

$$\nu_{t,eq} = \nu_{to,eq}[1 - \exp(\nu_{ti,eq}/\nu_{to,eq})]$$
$$\nu_{ti,eq} = D^2 k y(1 - \overline{u'v'}_{m,eq})^{1/2}$$
$$\nu_{to,eq} = 0.0168 u_e \delta_i^* \Gamma \tag{5-15}$$

关于扩散项 D 的确定，Johnson 等根据它与边界层外层流动的非平衡状态相关连的思想得到了

$$D_m = \frac{C_{dif}(-\overline{u'v'}_m)^{3/2}}{a_1 \delta[0.7 - (y/\delta)_m]} \left|1 - \left(\frac{\nu_{to}}{\nu_{to,eq}}\right)^{1/2}\right| \tag{5-16}$$

其中 C_{dif} 是常数，一般取 0.5。

若以 g 来代表 $(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$，则方程(5-14)最后可写作：

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1}{2\bar{u}_m L_m}\left[(1 - g/g_{eq}) + \frac{C_{dif} \cdot L_m}{a_1 \delta[0.7 - (y/\delta)_m]}\left|1 - \left(\frac{\nu_{to}}{\nu_{to,eq}}\right)^{1/2}\right|\right] \tag{5-17}$$

对流变化　　　产生和耗散间的差　　扩散作用

采用上一站位的 x 值，线化上述方程可求得 $(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$，再用此 $(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$ 来修正 σ，即

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n \frac{-\overline{u'v'}_m}{\left(\nu_t \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|\right)_m} \tag{5-18}$$

（二）**JK1990A**

Abid 等人将上述 JK 模型（称为 JK1985）改进后推广并应用到三维流动和求解雷诺平均 N-S 方程，我们称改进后的模型为 JK1990A[14]。此模型有如下几点改进：

1. 在内层涡粘性系数中，将速度尺度 u_T 改为

$$u_T = \max[u_m, \sqrt{\tau_w/\rho_w}] \tag{5-19}$$

其中 u_m 仍为 $(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}$。这一改进使模型用于顺压或压强梯度为零时能得到更好的表面摩擦系数。同时 $A^+ = 17$。

2. 在外层涡粘性系数中，为避免定义边界层厚度以适用于 N-S 方程计算，采用了 BL 模型中的尾迹模型，而不用原有的 Clauser 尾迹模型，即

$$\mu_{to} = 0.0168(1.6)\rho F_{wake}\Gamma_{(BL)}$$

$$\Gamma_{(BL)} = 1/[1 + 5.5(0.3y/y_m)^6] \tag{5-20}$$

3. 扩散项修改为

$$D_m = \frac{0.5(-\overline{u'v'}_m)^{3/2}\max(\sigma^{1/2} - 1.0)}{0.25(0.78 - y_m)} \tag{5-21}$$

并只用于 $\sigma>1$ 的情形。

耗散长度尺度 $L_m=\min(0.4y_m, 0.09\delta)$，其中 δ 为边界层厚度，现取 $1.9y_{max}$。

（三）JK1990J

应用 JK1985 模型于二维翼型计算时，对于平衡附着流动会给出不正确的激波位置。为此，Johnson 和 Coakley 提出了下述修正，得到 JK1990J 模型[15]。

1. 内层涡粘性的计算：考察近壁区内各类模型的涡粘性分布发展，壁面律的涡粘性介于 JK 模型和平衡状态模型（如混合长度或 Clauser 模型）之间。由于壁面律在近壁区的通用性，改进的 JK 模型在内层涡粘性的计算中将非平衡状态计算和平衡状态的计算予以组合，即

$$\nu_{t,i(blend)} = (1-\psi)\cdot\nu_{t,i(eq)} + \psi\nu_{t,i(JK)} \tag{5-22}$$

其中 $\nu_{t,i(eq)}$ 一般可取 $\nu_{t,i(ML)}$（混合长度模型）。组合函数 ψ 取

$$\psi = \tanh(y/L'_c) = \tanh[y(\tau_w^{1/2} + \tau_m^{1/2})/(y_m\tau_w^{1/2})] \tag{5-23}$$

计算中速度尺度 u_T 仍为(5-19)，而 u_m 则加了一个可压缩性修正，即

$$u_m = \sqrt{\rho_m/\rho}(-\overline{u'v'}_m)^{1/2} \tag{5-24}$$

2. 外层涡粘性计算与 JK1985 模型的计算一样，但内、外层涡粘性的光滑连接改用 tanh 函数以在顺压和零压强梯度时得到更好的摩擦应力结果，即

$$\nu_t = \nu_{t,o(JK)}\tanh(\nu_{t,i(blend)}/\nu_{t,o(JK)}) \tag{5-25}$$

（四）JK1992

在 JK1990A 中，为了避免定义 δ，在外层涡粘性计算中采用 BL 模型的计算公式，而不用 Clauser 公式。Johnson 于 1992 年再次对外层涡粘性计算公式作了讨论[16]，其二维计算结果表明采用 Clauser 公式明显优于 BL 的 $F_{max}y_{max}$ 计算公式，但前者需定义 δ 的值以便计算 $q_\delta\delta^*$。经过分析和讨论，Johnson 建议取 $\delta=1.2y_{1/2}$，$y_{1/2}$ 为 $F/F_{max}=0.5$ 时的 y 值。

由于有了 δ 的定义，外层涡粘性的计算仍可采用 Clauser 型的外涡粘性公式(5-11)。这一模型称为 JK1992，它不仅可用于二维，也可用于三维，在三维计算时 $q_\delta\delta^* = \int_0^\delta F\mathrm{d}y$。

JK1992 模型除上述修正外，其余同 JK1990J。

表 5-1 给出了上述 JK 模型中各种修正对计算激波位置和分离区域的影响。

表 5-1　JK 模型修正项对计算激波位置的影响

使激波向上游移动（分离区大）	使激波向下游移动（分离区小）
Clauser 型外层模型	Baldwin-Lomax 型外层模型
用 EXP 函数连接内、外层模型	用 tanh 函数连接内外层模型
扩散项中为 Abs 函数	扩散项中为 Max 函数
JK 平衡的内层模型	JK 的平衡/非平衡组合的内层模型

一般来说，后两项修正——扩散项的处理不同和内层涡粘性的模型——的影响相对较小，前两项修正的影响较大。外层涡粘性采用 Clauser 型模型使激波前移，采用 BL 模型则使激波位置后移；

连接内、外层涡粘性的函数也影响激波的位置，用 tanh 函数会给出较高的最大涡粘性值，故会使激波后移；在分离区较大的流动中，这些影响会更加显著。此外，不同的模型对三维流动解的影响更大。

三、Baldwin-Barth（BB）一方程模型

二维翼型跨声速 N-S 方程的数值计算表明，湍流模型对计算结果的影响相当大。采用简单的代数模型对复杂流场，如激波边界层干扰引起分离的流动等，不能得出足够精确的结果。BL 模型虽避开了对边界层厚度的确定而可应用于 N-S 方程，但所有代数模型就其物理本质看，都具有边界层模型的性质，且是将边界层作为一个不可分割的整体来模型化的，因此对如多段翼型的绕流或带有切向喷流的环量控制翼型的绕流等实际流动，它们就既不正确也不可靠。同时，确定模型的长度尺度也很困难。

经典的二方程模型比代数方程有很多优点。由于它是场的输运方程模型，因而具有“局部”性，更适用于复杂流动；但采用二方程模型的计算十分复杂，要求给出难以给定的湍流变量的初始条件，特别还要求近壁面的网格很细，会引起流场求解的刚性问题等；而从已有的计算结果看，对于附壁流动，二方程模型较之代数模型并无明显的优点，因而迫切需要建立一些新的一方程或二方程模型。近年来提出的 Baldwin-Barth(BB)一方程模型[17]就是一例。它是在二方程模型中，将某一导出的应变量不作为基本物理量而得到的。应用此一方程模型可避免求解 k—ε 方程时会遇到的某些数值困难。

BB 一方程所选择的导出应变量为“湍流雷诺数，$R_T=k^2/\nu\varepsilon$”。由此可知 $\mathrm{d}R_T/R_T=2\mathrm{d}k/k-\mathrm{d}\varepsilon/\varepsilon$，$R_T$ 的场方程可由标准的 $k-\varepsilon$ 方程推得。对 $k-\varepsilon$ 方程中模型化的扩散项作些简化后可推得：

$$\frac{\mathrm{D}(\nu R_T)}{\mathrm{D}t}=(2-C_{\varepsilon_1})\frac{\nu R_T}{k}P+(C_{\varepsilon_2}-2)k+\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_R}\right)\nabla^2(\nu R_T)-\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\nabla\nu_t)\nabla(\nu R_T)$$

$$\nu_t=C_\mu(\nu R_T) \tag{5-26}$$

由于我们研究的是绕固壁运动，故在近壁区湍流雷诺数 R_T 可分裂为

$$R_T=\tilde{R}_T f_3(\tilde{R}_T)$$

其中 f_3 为一阻尼函数，它可使 R_T 很大时得到 $R_T\approx\tilde{R}_T$。

在薄层假设下，以平板绕流的流动特性作为检测模型的根据，分析上述方程中的各项并进行模型化，最后可得到修正的湍流雷诺数 $\tilde{R}_T$ 的一方程模型为：

$$B_1=\frac{\mathrm{D}(\nu\tilde{R}_T)}{\mathrm{D}t}=(C_{\varepsilon_2}f_2-C_{\varepsilon_1})G_1\sqrt{\nu\tilde{R}_T P}+\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_R}\right)G_1\nabla^2(\nu\tilde{R}_T)-$$

$$\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\nabla\nu_t)\cdot\nabla(\nu\tilde{R}_T) \tag{5-27}$$

其中

$$\frac{1}{\sigma_\varepsilon}=(C_{\varepsilon_2}-C_{\varepsilon_1})\sqrt{C_\mu}/k^2 \quad \nu_t=C_\mu(\nu\tilde{R}_T)D_1D_2$$

$$\sigma_R=0.25\sigma_\varepsilon \qquad \mu_t=\rho\nu_t$$

$$D_1=1-\exp(-y^+/A^+) \qquad D_2=1-\exp(-y^+/A_2^+)$$

$$P=\nu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\nu_t\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2$$

$$f_2(y^+) = \frac{C_{\varepsilon_1}}{C_{\varepsilon_2}} + (1 - \frac{C_{\varepsilon_1}}{C_{\varepsilon_2}})(\frac{1}{Ky^+} + D_1D_2)[\sqrt{D_1D_2} +$$

$$\frac{y^+}{\sqrt{D_1D_2}}(\frac{1}{A^-}\exp(-\frac{y^+}{A^-})/D_2 + \frac{1}{A_2^+}\exp(-\frac{y_+}{A_2^+})D_1)]$$

$$G_1 = 1 + \frac{F_R^4 + \varepsilon_0/B_2}{\omega^4 + B_2F_R^4 + \varepsilon_0} \qquad F_R = \frac{(\nabla \nu\tilde{R}_T)\cdot(\nabla \nu\tilde{R}_T)}{\nu\tilde{R}_T} - \frac{K^2}{C_\mu}|\omega|$$

和 $K=0.41$ $C_{\varepsilon_1}=1.2$ $C_{\varepsilon_2}=2.0$ $C_\mu=0.09$ $A^+=26$

$A_2^+=10$ $B_1=0.4$ $B_2=0.01$ $\varepsilon_0=10^{10}$

壁面处的边界条件为 $\tilde{R}_T=0$。

模型中的 $\tilde{R}_T$ 在壁面邻近随 y 作线性变化，因此对计算网格的要求较低，壁面的网格可以与采用 BL 代数模型的相当，而不象 $k-\varepsilon$ 两方程模型那样要求壁面网格很细，这样就避免了在 $k-\varepsilon$ 模型中流场解的刚性问题。

四、Spalart-Allmaras（SA）一方程模型

SA 模型[18]与 BB 模型不同，不是直接利用 $k-\varepsilon$ 两方程模型加以简化而得，而是从经验和量纲分析出发，由针对简单流动再逐渐补充发展而适用于带有层流流动的固壁湍流流动的一方程模型。模型中选用的应变量是与涡粘性 ν_t 相关的量 $\tilde{\nu}$，除在粘性次层内之外 $\tilde{\nu}$ 与 ν_t 是相等的。在对数律层中 $\nu_t=Kyu_\tau$，在粘性次层中则不然。为此，定义 $\tilde{\nu}$，使其值直到壁面都等于 Kyu_τ，于是

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu_1}, \quad f_{\nu_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu_1}^3}, \quad \chi = \tilde{\nu}/\nu \qquad (5\text{-}28)$$

此处下标 ν 指“粘性”，其中 C_{ν_1} 可取 7.1，ν 是层流粘性系数。这样定义的根据是从壁面至对数律之间的范围内实际存在着 $\chi=ky^+$ 的关系。如此选择变量的好处是在近壁处变量 $\tilde{\nu}$ 与离壁面的距离有线性变化关系，不象如 ε 等湍流物理量那样难解。甚至比速度 u 还容易求解，所以用此方程和用 BB 模型一样，在壁面附近不需要非常精细的网格，只需与代数模型相当的网格即可，因而也具有计算容易的优点。通过对自由剪切流、高雷诺数时的近壁区流动、有限雷诺数的近壁区流动、包含层流区和转捩的流动等四种状态的分析和模型化，最终可得：

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = C_{b_1}[1 - f_{t_2}]\tilde{s}\,\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma}[\nabla((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}) + C_{b_2}(\nabla\tilde{\nu})^2] -$$

$$[C_{w_1}f_w - \frac{C_{b_1}}{K^2}f_{t_2}][\tilde{\nu}/d]^2 + f_{t_1}\Delta u^2$$

其中

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu_1}, f_{\nu_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu_1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

雷诺应力项

$$-\overline{u_iu_j} = 2\nu_t S_{ij}, S_{ij} \equiv \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)/2 \qquad (5\text{-}29)$$

$$\tilde{s} = s + \frac{\tilde{\nu}}{K^2d^2}f_{\nu_2}, \quad f_{\nu_2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu_1}}, \quad s = u_\tau/Kd,$$

$$f_w = g\left[(1 + C_{w_3}^6)/(g^6 + C_{w_3}^6)\right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w_2}(r^6 - r),$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{s} K^2 d^2}, \qquad f_{t_2} = C_{t_3}\exp(-C_{t_4}\chi^2)$$

转捩函数 $$f_{t_1} = C_{t_1} g_t \exp\left(-C_{t_2}\frac{\omega_t^2}{\Delta u^2}[d^2 + g_t^2 d_t^2]\right)。$$

其中 d 是场点至壁面的距离，d_t 是场点至转捩带的距离，ω_t 是转捩点处的旋度。Δu 是场点与转捩点处的速度增量，$g_t = \min(0.1, \Delta u/\omega_t \Delta x)$，$\Delta x$ 是转捩点壁面网格的大小。各常数值分别是：$C_{b_1} = 0.1355$，$\sigma = 2/3$，$C_{b_2} = 0.622$，$K = 0.41$，$C_{w_1} = C_{b_1}/K^2 + (1 + C_{b_2})/\sigma$，$C_{w_2} = 0.3$，$C_{w_3} = 2$，$C_{v_1} = 7.1$，$C_{t_1} = 1$，$C_{t_2} = 2$，$C_{t_3} = 1.1$，$C_{t_4} = 2$。解方程所需的壁面边界条件可令 $\tilde{\nu} = 0$，在自由流处 $\tilde{\nu} = 0$；初始条件可令 $\tilde{\nu} = 0$ 等于均匀的自由来流值。

上述两种一方程模型具有相似的特点，它们都不象代数模型那样需要分为内层模型、外层模型或壁面模型、尾迹模型，同时亦不需要沿法向网格线寻找最大值等，因此易于用到非结构网格中去；但由于在每个时间步长内，需要对整个流场求解一组偏微分方程，故比 BL 和 JK 模型更费机时。不过对于一个定态解来说，并不需要在每一时间步长内使其湍流模型的偏微分方程组的解都完全收敛。根据已有经验，总体来看上述一方程模型比 BL 模型的计算机时约增加 20%左右。目前此二模型还在改进和发展中，相信随着时间和经验的增长，会使这些模型更为完善。

第三节　简化湍流模型的应用举例

目前要用求解 N-S 方程来模拟湍流流动时都采用简化的湍流模型。本节仅据笔者所知举例说明各种湍流模型的应用能力并加以比较。

一、多段翼型的绕流

绕多段翼型的流动虽是二维流动，却包含着极为复杂的流动现象，其中所遇到的粘性问题都是流体力学中具有挑战性的课题。图 5-3 表示出了多段翼型绕流中的粘流现象，包括：层流分离、湍流接触线和再层流化、激波和边界层干扰、湍流边界层的发展、尾流发展、渗混边界层及粘性尾流相互作用等。显然，简单的代数模型无法描述如此复杂的粘流现象。采用不同的湍流模型求解 N-S 方程对流动模拟的结果有不小的差异。Rogers 等人用 Baldwin-Barth(BB)模型，Spalart-Allmaras(SA)模型，Durbin-Mansour(DM)模型和由 Menter 改进的二方程 q-ω 模型等分别对 McDonnell-Douglas 三段翼型做了对比计算[19]，其中 DM 模型与 BB 模型类似，只是未采用阻尼函数而采用了椭圆松弛方程并且无需确定与壁面的距离等。图 5-4 给出了 McDonnell-Douglas 三段翼形的几何外形。他们所使用的计算程序 INS2D 是一个用人工压缩性方法求解不可压 N-S 方程的计算程序。N-S 方程中的对流项采用三阶迎风偏置通量差的分裂格式，对时间的积分采用了隐式线松弛方法。计算的 $Ma_\infty = 0.2$。图 5-5 给出了 $\alpha = 0°$，16°和 21°时采用不同模型在各翼面上的压强分布。由图可见，计算与实验的结果总的说来吻合得都不错，只是在 $\alpha = 8°$时前缘缝翼上的计算压强分布与实验值不完全吻合，这与两者对小翼上气流分离程度的估计直接相关。此外 DM 模型在 $\alpha = 21°$时的前缘缝翼和后缘襟翼上计算的压强分布也不能很好地符合实验值。图 5-6 给出了各流向站位处计算和实验速度分布的比较。一般来说，两者符合得还不错，然而同样在 $\alpha = 8°$时，站位 1 处尾流速度型的计算值与实验值差别较大，相比之下 BB 和 SA 模型的计算值稍接近于实验值。图 5-7 给出

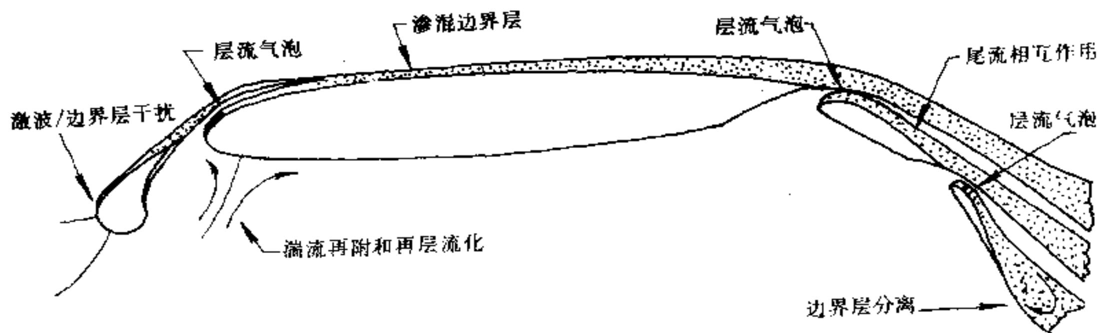


图 5-3 多段翼型绕流中的粘流现象

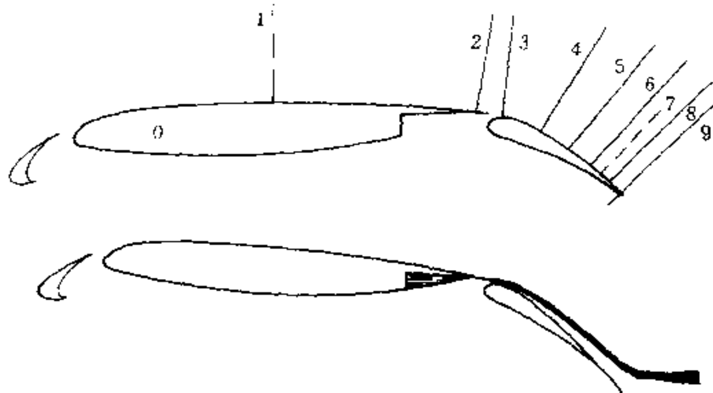


图 5-4 MD 三段翼型的几何外形

了升力随迎角 α 变化的曲线。由图可知，在 $\alpha<16°$ 时各模型的计算升力都与实验值吻合得很好，但在最大升力处却没有一个模型的计算值与实验值吻合。图 5-8 给出了力矩系数随迎角 α 变化的曲线。曲线表明，在小迎角时 SST 模型的计算值与实验值很一致，SA 和 BB 模型的计算值也很接近实验值，但在 $\alpha=10°$，$16°$ 时，实验值呈现斜率增大的趋势，但却没有一种模型能反映这一趋势。图 5-9 给出了阻力随迎角 α 变化的曲线，可以看出，所有模型都未能给出正确的阻力值，这可能是由于用表面压强积分来计算阻力这一方法本身会造成较大的误差。

由上述的简单比较可知，不同模型给出的计算结果之间的差异小于计算与实验结果之间的差异。大部分的比较结果表明，SA、SST 和 BB 模型的应用能力相仿，DM 模型稍差。

Shima 等人对 Boeing 的三段翼型比较了 SA 模型和 Coakey 的两方程 q-ω 模型[20]。求解 N-S 方程的计算方法采用了隐式 TVD 格式，计算的 $Ma_\infty=0.184$，$Re=2.3\times10^6$。图 5-10 给出了两种模型计算出的等总压线和等涡粘性线。可见两者算出的流态相似，在 $\alpha=12°$ 都认为气流发生了分离，但实验中却并未发现有分离现象。图 5-11 给出了两种模型在不同迎角下计算所得的压强分布与实验值的比较。可见在较小迎角($\alpha<8°$)时，前缘缝翼和后缘襟翼上的计算值都与实验值有些差异，在较大迎角($\alpha>16°$)时，SA 模型的计算结果与实验结果吻合得很好，而 q$-\omega$ 模型的结果则仍有差异。图 5-12 给出了升力随迎角变化的曲线。可以看出，SA 模型在小迎角和大迎角时的计算升力值都与实验值接近，在 $\alpha=12°$ 时，由于计算中出现了气流分离而使升力值与实验值有较大差异；q-ω 模型在大迎角时的计算值与实验值差别较大。

Anderson 等人在非结构网格计算中采用了 SA 模型[21]。他们用以节点为基础的隐式迎风格

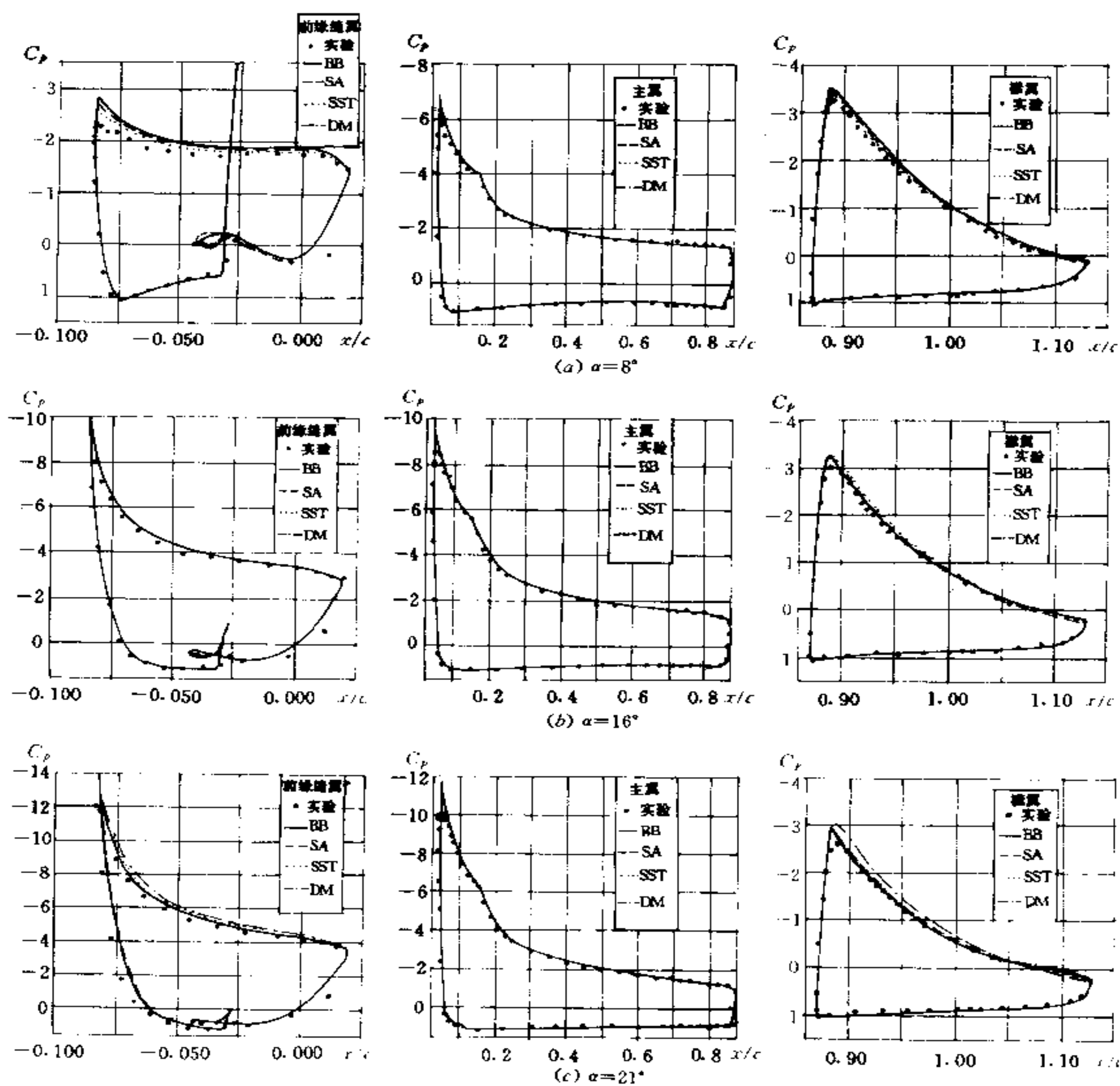


图 5-5　表面压强分布 $Re=9\times10^6$

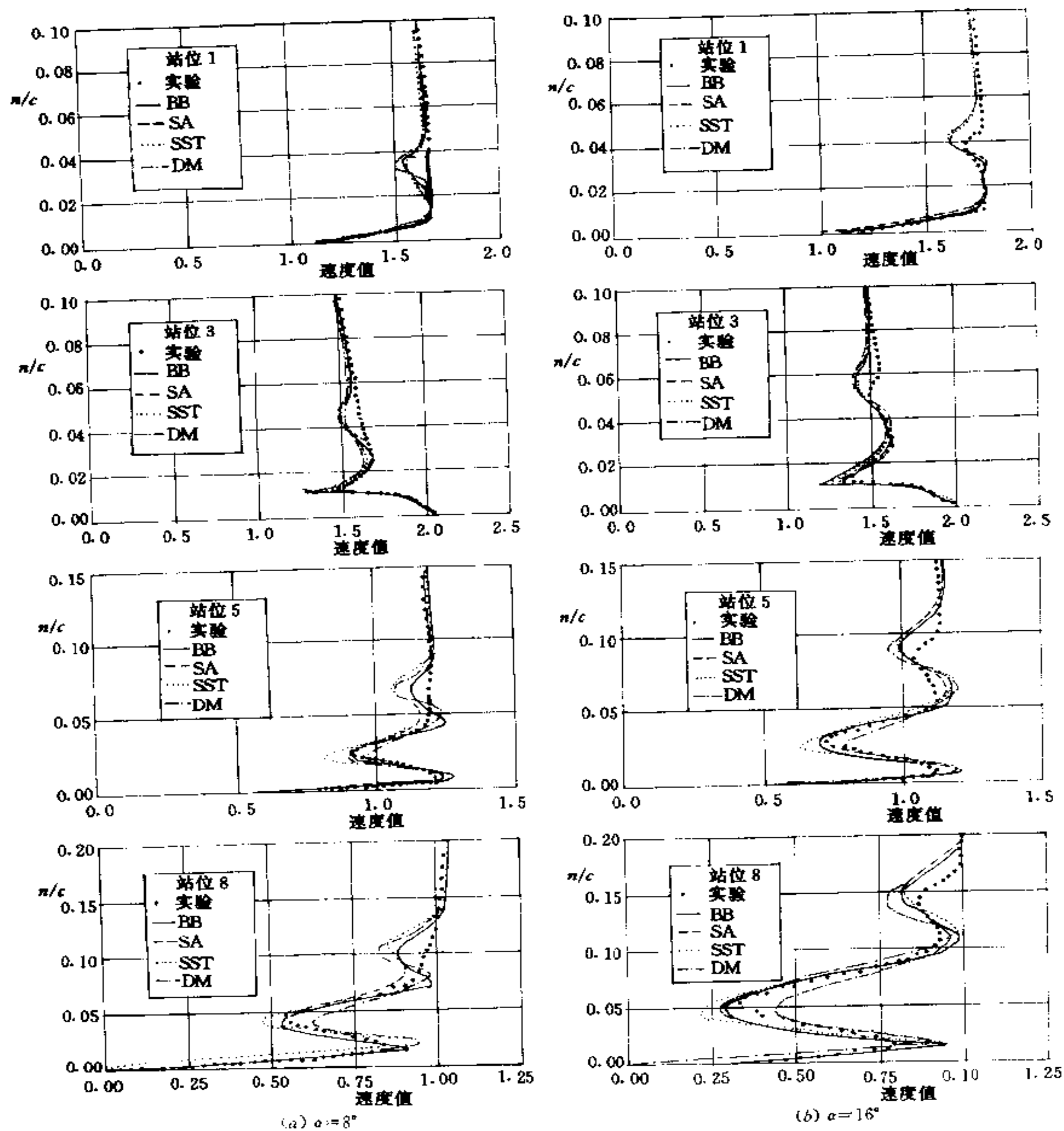
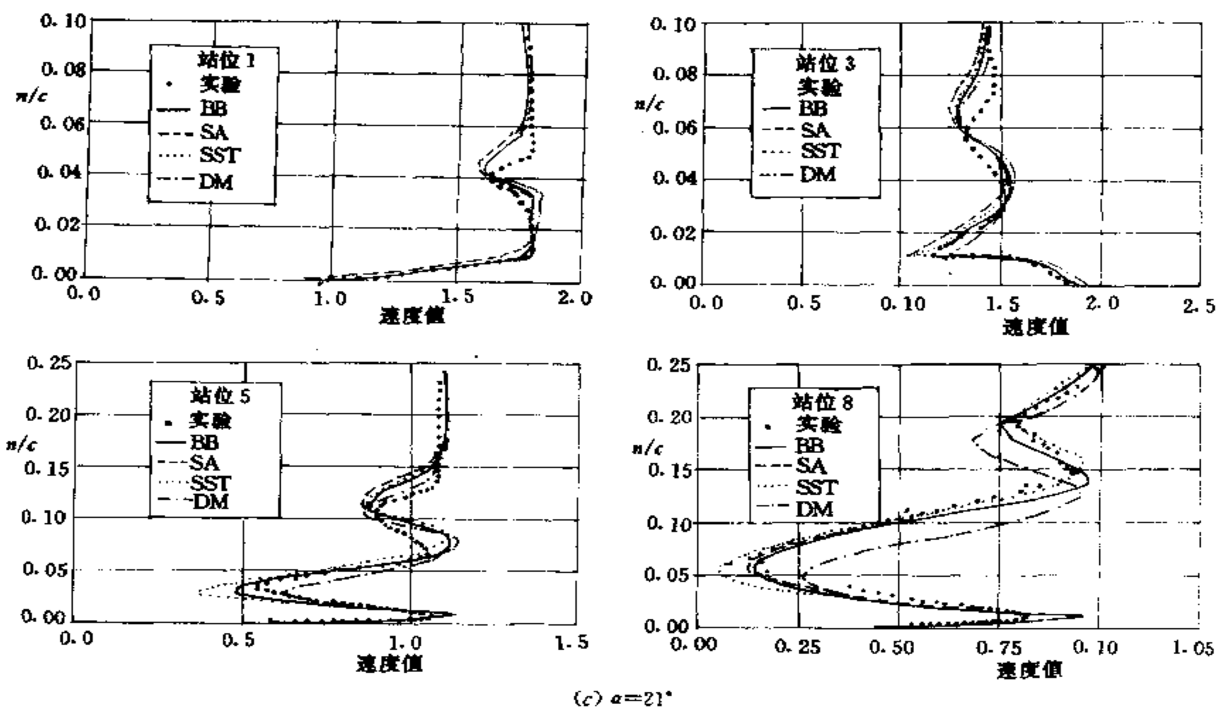


图 5-6　不同弦向位置处的速度分布



续图 5-6 不同弦向位置处的速度分布

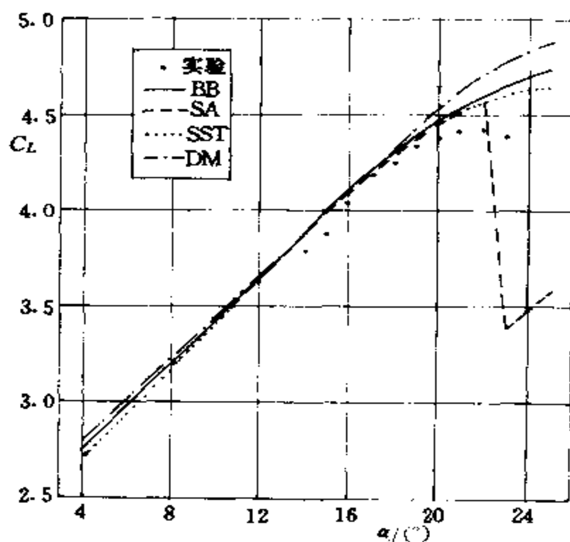


图 5-7 升力随迎角的变化

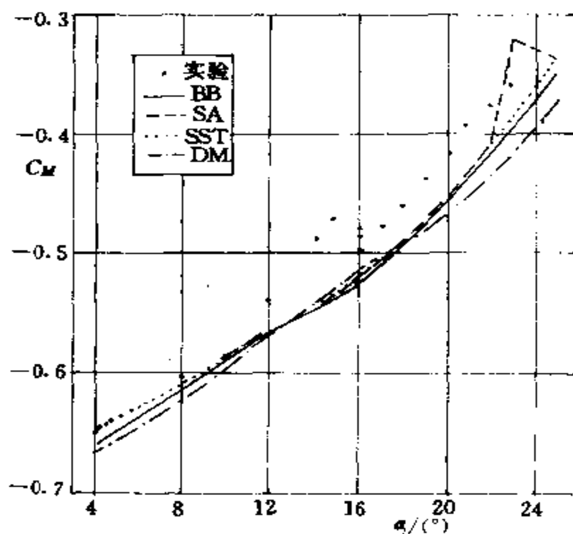


图 5-8 纵向力矩随迎角的变化

式计算方法计算了三段翼型的绕流特性。计算结果与 Roger 的结果类似。图 5-13 分别给出 $\alpha=16.3°$和 $\alpha=22.36°$时的压强分布。图 5-14 给出了 C_L 随 α 的变化曲线。总体来看，计算结果与实验结果吻合得很好。此例说明 SA 模型完全适用于非结构网格。

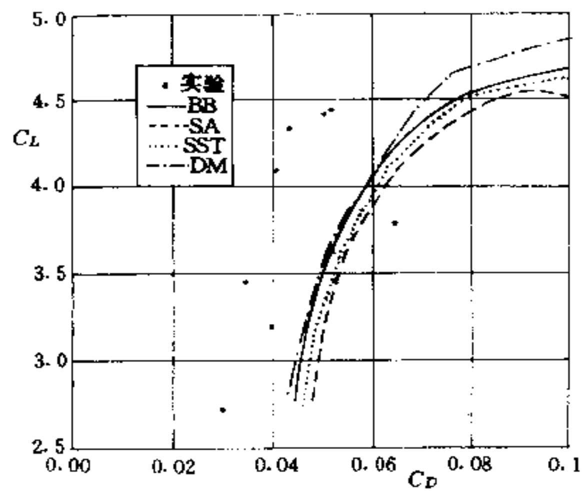


图 5-9　阻力随迎角的变化

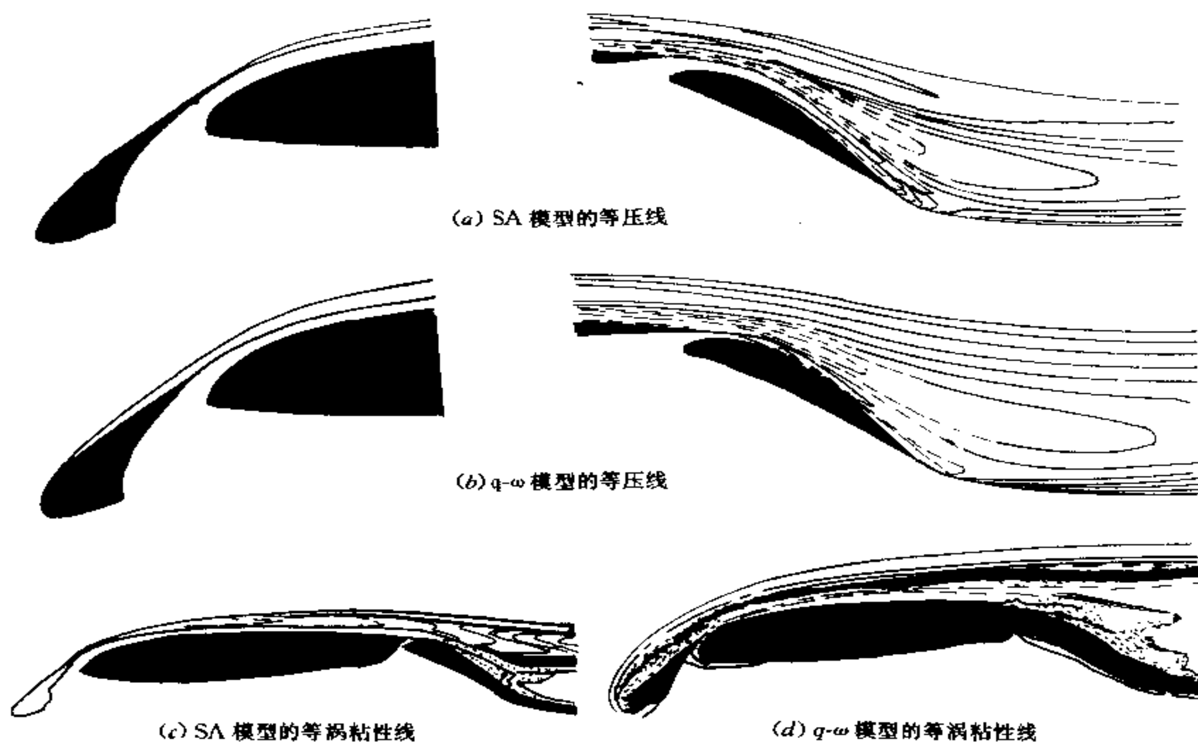
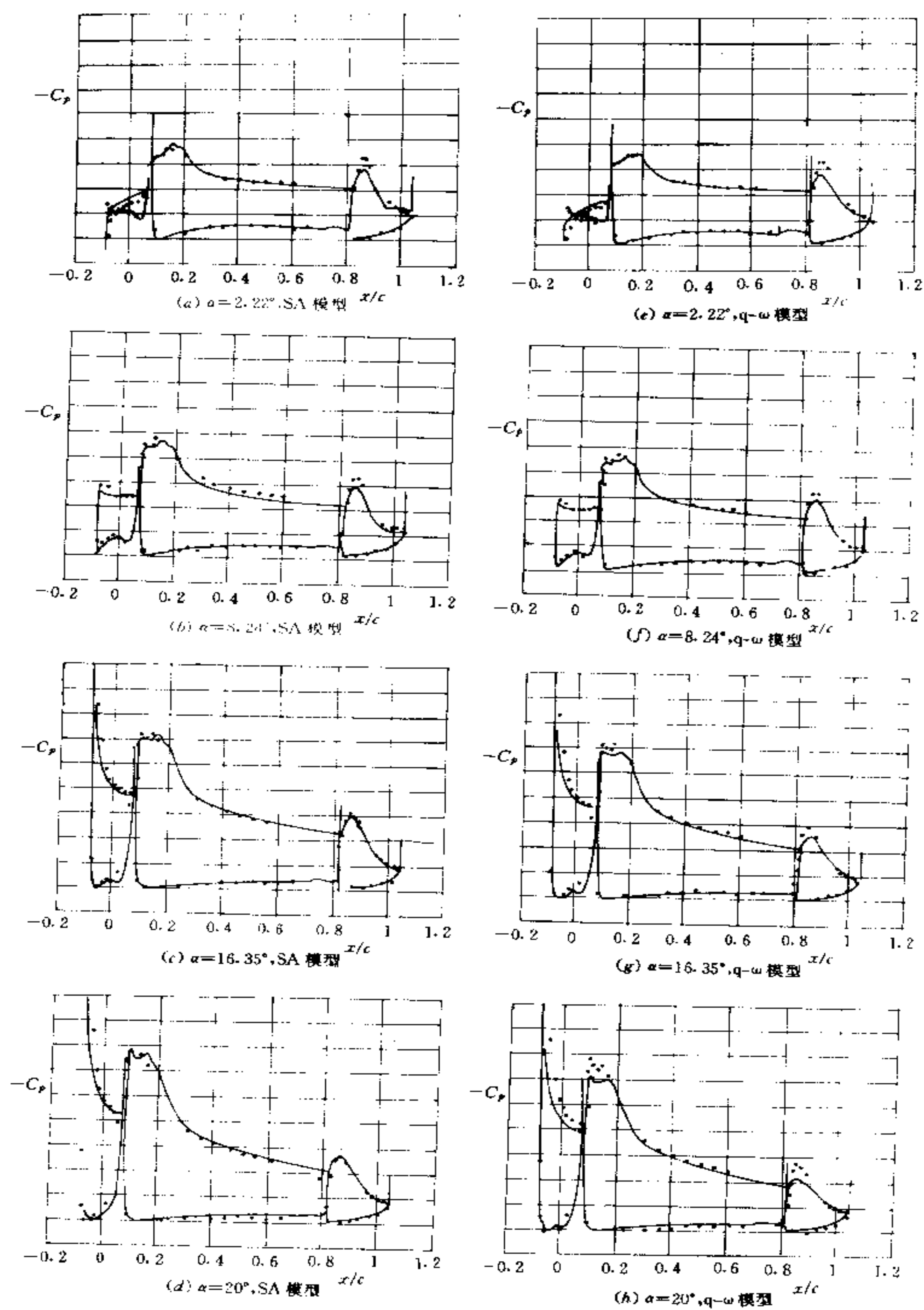


图 5-10　两种湍流模型计算的等压线和等涡粘性线



$-C_p$
x/c
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
(a) α=2.22°,SA 模型
(b) α=8.24°,SA 模型
(c) α=16.35°,SA 模型
(d) α=20°,SA 模型
(e) α=2.22°,q-ω 模型
(f) α=8.24°,q-ω 模型
(g) α=16.35°,q-ω 模型
(h) α=20°,q-ω 模型

图 5-11　表面压强分布

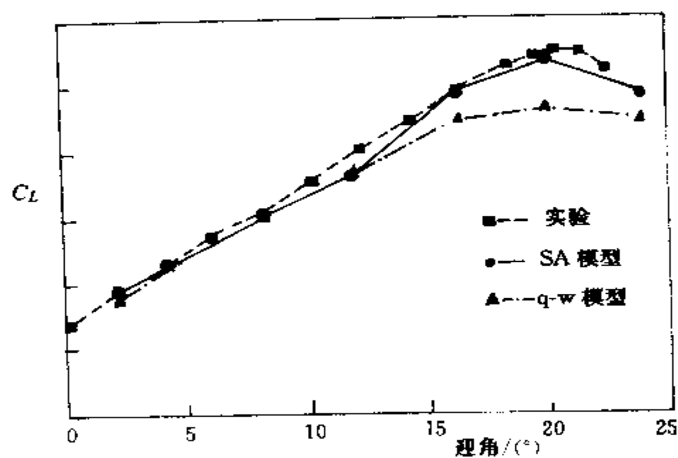


图 5-12　升力随迎角的变化

前缘缝翼　主翼　襟翼

细网格
基本网格
粗网格
实验

C_p

η

0.00　0.05　0.10　0.15

0.0　0.2　0.4　0.6　0.8　1.0

0.7　0.8　0.9　1.0

(a) $\alpha=16.30°$

前缘缝翼　主翼　襟翼

细网格
基本网格
粗网格
实验

C_p

η

0.00　0.05　0.10　0.15

0.0　0.2　0.4　0.6　0.8　1.0

0.7　0.8　0.9　1.0

(b) $\alpha=22.36°$

图 5-13　不同网格中压强分布的比较 $Ma_\infty=0.2$　$Re=9.6\times10^6$

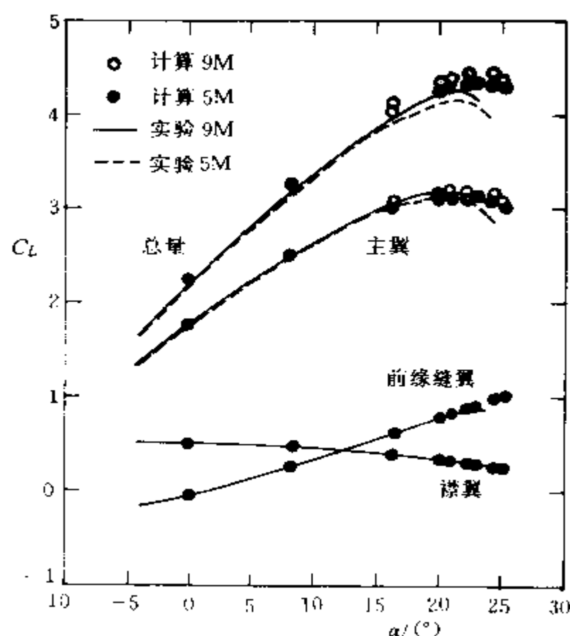


图 5-14 升力随迎角的变化

$Ma_\infty=0.2$ $Re=5\times10^6$ 和 9×10^6

二、翼型的动失速和非定常运动

研究动失速现象是一个非常重要的课题。按照 McCroskey 的意见，动失速是指一个振荡细长压力面在超过其临界迎角时其绕流流场发生破裂(breakdown)的现象。实验表明，这时出现的旋涡型扰动是由于或在该升力面后缘发生了非定常分离，或在该升力面前缘分离气泡破裂。动失速将大大影响在该升力面上产生的力和力矩。

McCroskey 根据粘性作用的大小，将上述复杂流动大致分成四类：

1. 不失速-弱粘性/无粘相互作用；
2. 出现失速-中等程度的粘性/无粘相互作用；
3. 轻失速-强粘性/无粘互相作用；
4. 深失速-全粘性现象。

轻失速和深失速是很难计算的，轻失速除表现出一般静态失速特征外，又有非定常分离的强粘性/无粘相互作用的性质，这时空气动力阻尼是最强的，同时边界层厚度将达到翼型厚度的量级。深失速的特点是存在高度非线性的压力脉动和在翼型表面上有很大的涡结构的运动，这时的边界层厚度可达翼弦长度的量级。在计算动失速问题时，必须解决湍流的时间尺度、空间尺度及它们的影响等困难问题。采用雷诺平均 N-S 方程求解非定常湍流流动时，必须仔细地研究适用于定常流动的湍流模型应用于非定常计算时的可靠程度。

（一）湍流模型非平衡性的影响

M. Dindar 等讨论了 BL 和 JK 模型应用于翼型动失速计算的问题[22]。图 5-15 分别给出了静态失速时计算的和实验所得的升力 C_L 和纵向力矩 C_M 随迎角 α 变化的比较，计算的 $Ma_\infty=0.3$，$Re_\infty=4*10^5$。由图可见，BL 模型计算的升力虽然在 $\alpha\leqslant13°$时与实验数据吻合得很好，但延缓了静

态失速的发生，且使 C_L 值大于实验值，在力矩曲线中，BL 模型计算的结果不能得到负阻尼；而 JK 模型计算的 C_L 和 C_M 结果都与实验结果吻合得很好。这表明，在计算有较大分离区的流动时，考虑不考虑非平衡效应对结果的影响是很大的。图 5-16 分别给出了 $Ma_\infty=0.3$，$Re_\infty=4*10^6$。$\alpha(t)=11°+5\sin(2Ma_\infty kt)$ 和 $k=\frac{\omega C}{2V_\infty}=0.1$ 时（相当于轻失速状态）计算的和实验所得的 C_L 和 C_M 随 α

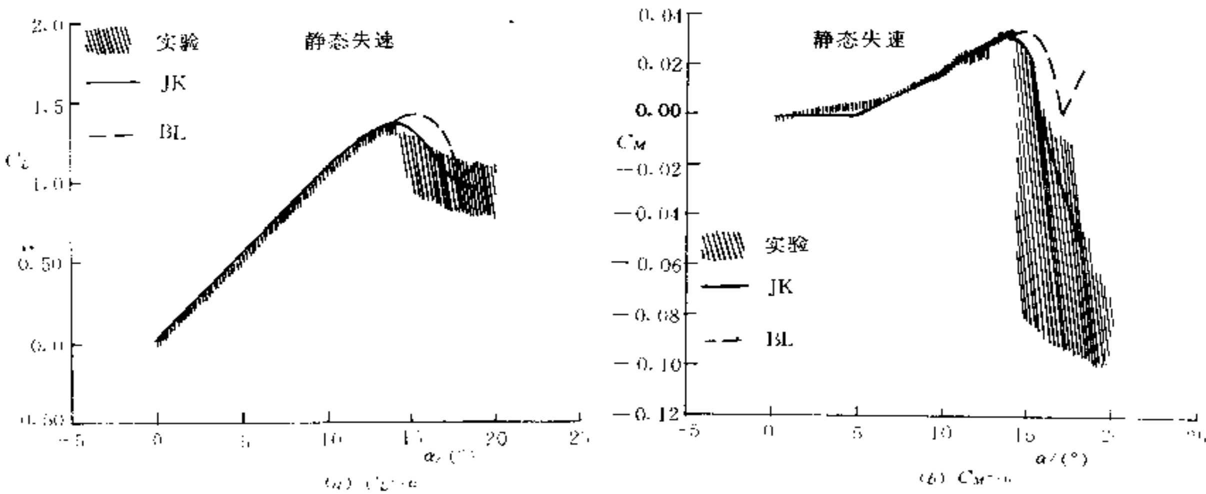


图 5-15　NACA0012 翼型静态失速时 C_L 和 C_M 随迎角变化的比较

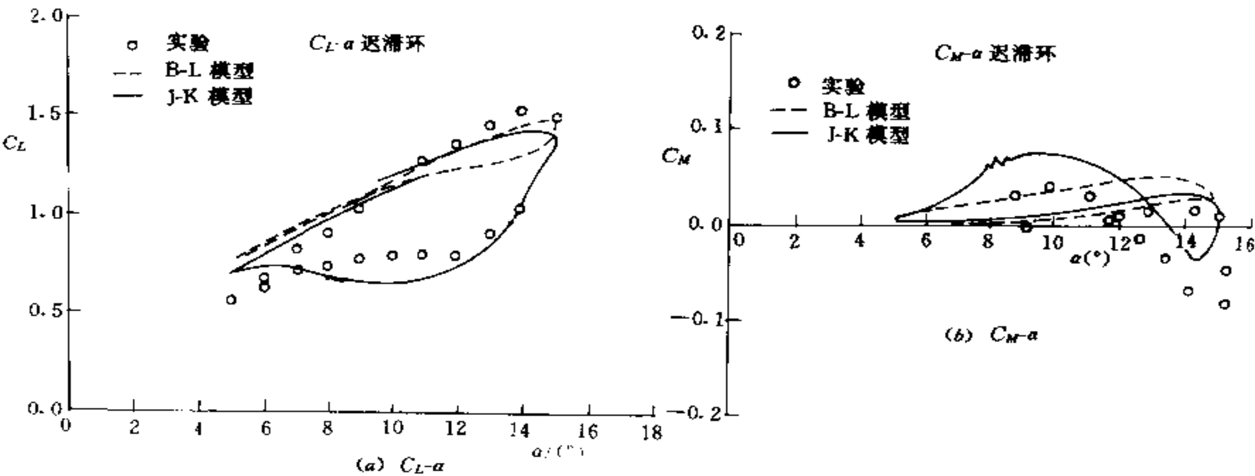


图 5-16　NACA0012 翼型轻失速时 C_L 和 C_M 随迎角变化的比较

变化的比较。由图可见，平衡模型 BL 计算的升力迟滞环曲线很不准确，这是因为平衡模型未能算出轻失速时的分离涡；而 JK 模型计算的迟滞环曲线却与实验值很相近，具有包括俯仰负阻尼的正确形状。图 5-17 给出了用 JK 模型计算的流体质点轨线图。可以看到旋涡位于翼型的后缘，其影响范围约为翼型的厚度大小，表现了轻失速的典型流态。图 5-18 给出了 $Ma_\infty=0.3$，$Re_\infty=4*10^6$，$\alpha(t)=10°+10\sin(2Ma_\infty kt)$，$k=0.1$ 时（相当于深失速状态）的 $C_L\sim\alpha$ 的迟滞环曲线。升力曲线表明，两种模型计算上仰运动时有很相似的趋势，都给出了比实验值低的最大 C_L 值，计算下俯运动时却有完全不同的变化趋势，BL 模型在 $\alpha=20°$ 时，C_L 有很大的减小，虽然到 $\alpha=18°$ 时已基本恢复到

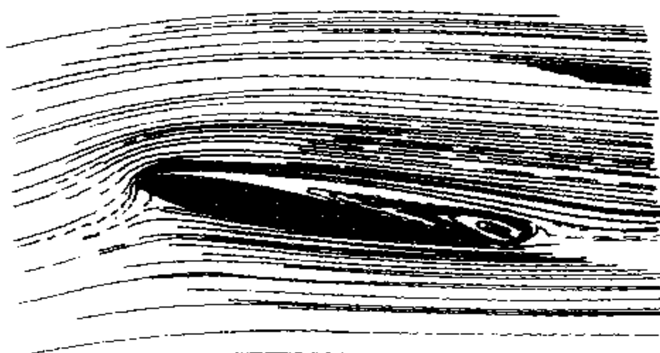


图 5-17 JK 模型计算的流体质点轨线图

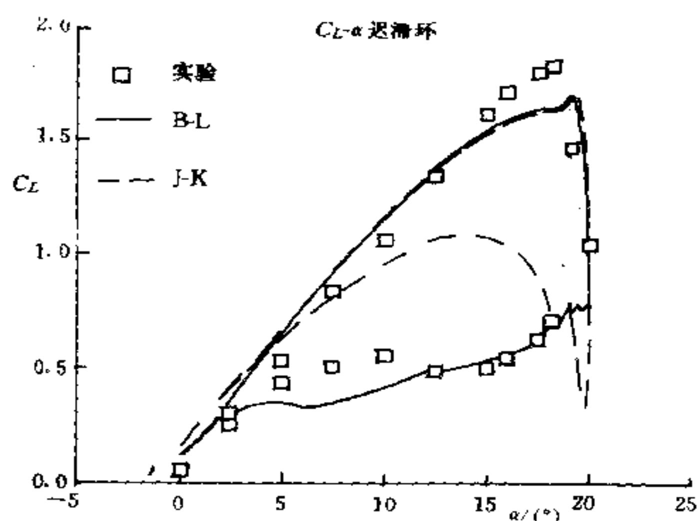


图 5-18 NACA0012 翼型深失速时 C_L 随迎角变化的比较

与实验值相等，但随后的变化情况完全不同于实验值的变化情况，因而其迟滞环曲线的形状与实验的完全不同。JK 模型在整个下俯运动过程中计算所得的 C_L 值与实验值保持着相似的变化，得到了比较准确的迟滞环形状。图 5-19 给出了两种模型在下俯运动时流体质点的轨线图。可以看出，JK 模型的计算结果形成了大的前缘分离涡，体现了深失速的典型流态，而 BL 模型却未体现这种流态。对比这两种模型计算的升力曲线的差别可以看出非平衡湍流模型可以算出大的前缘分离涡，且此分离涡拖至翼型上表面的大部分地区。图 5-20 给出了力矩曲线的迟滞环，其中 JK 模型给出了定性吻合实验值的计算结果。

上述讨论清楚地表明，采用较好的改进的湍流模型可大大改进非定常大分离流动的计算结果。

（二）一方程模型和二方程模型的对比计算

Ekaterinaris 和 Menter 进一步讨论了一方程和二方程湍流模型对计算非定常大分离流动的影响[23]，对比了一方程的 BB 模型、SA 模型和二方程的 $k-\omega$ 模型。此处的 ω 是脉动涡量的平方平均值 $\omega^2=\overline{\omega'^2}$，又称湍流频率。原始的 $k-\omega$ 模型是由 Wilcox 发展起来的，比传统的 $k-\varepsilon$ 模型有

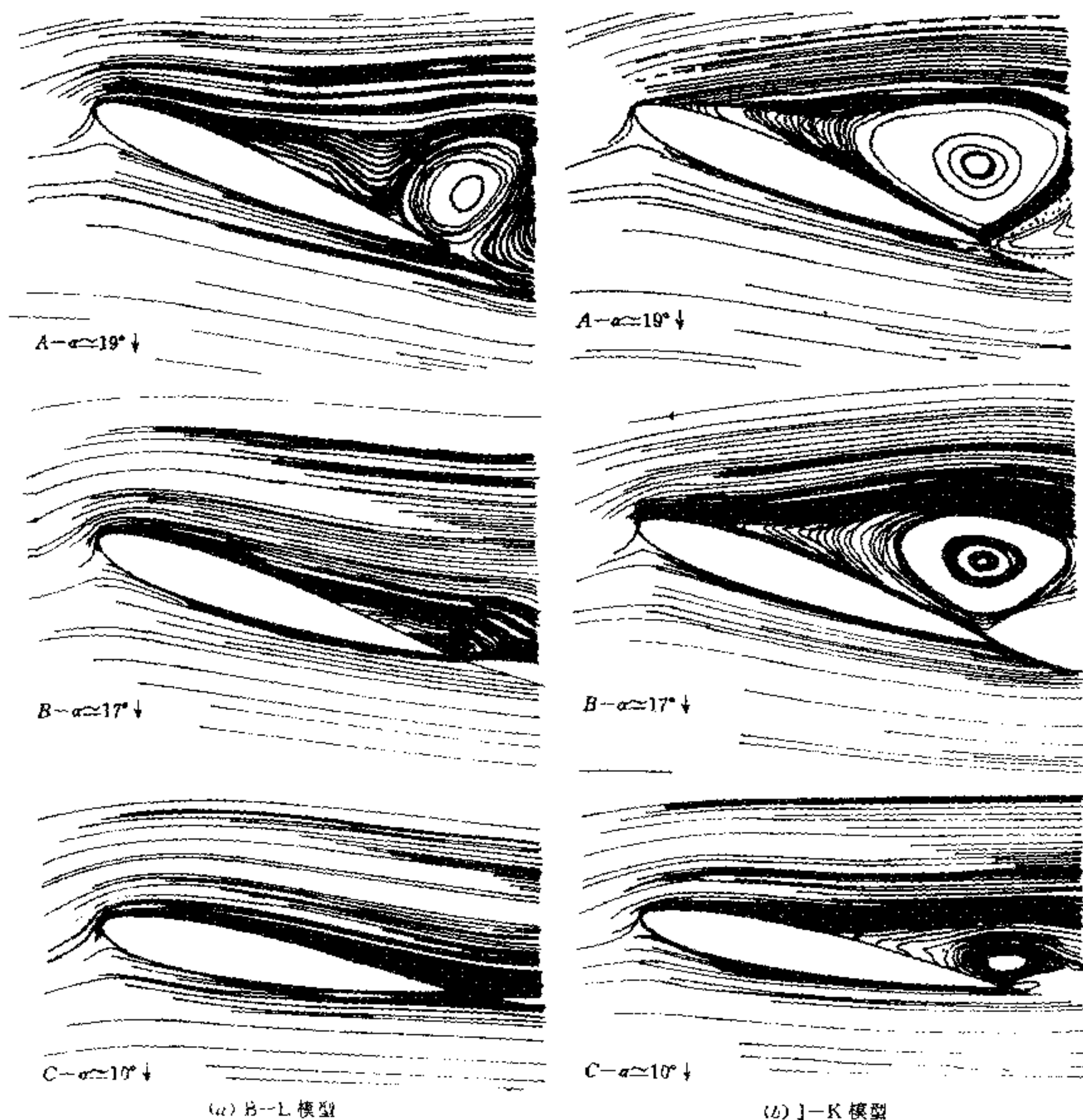


图 5-19 深失速下俯运动时流体质点轨线图

(1)改进了对中等逆压梯度流动的计算结果,(2) 改进了对粘性次层的处理,从而大大改善了数值积分的稳定性等优点。但其计算的涡粘性对自由流的湍流频率值 ω_f 有强烈的依赖性,采用不同的 ω_f 值会使涡粘性的变化超过 100%。为此 Menter 发展了 Baseline(BSL)k—ω 模型,其计算结果对 ω_f 不再敏感。为进一步提高在强逆压梯度分离流时的计算能力,他又发展了 Shear Stress Transport (SST) k—ω 模型。这里主要介绍 SST k—ω 模型对非定常流动的计算能力并与一方程模型的结果进行对比。

Ekaterinaris 和 Menter 指出,转捩对非定常分离流的特性有很大影响(将在下面讨论),然而 Dindar M. 等在做完全湍流的对比研究中所使用的 McCroskey 实验数据大部分是在没有转捩带时取得的,因而实验数据与前缘转捩有很大关系。为了进行非定常完全湍流的对比研究,Ekaterinaris

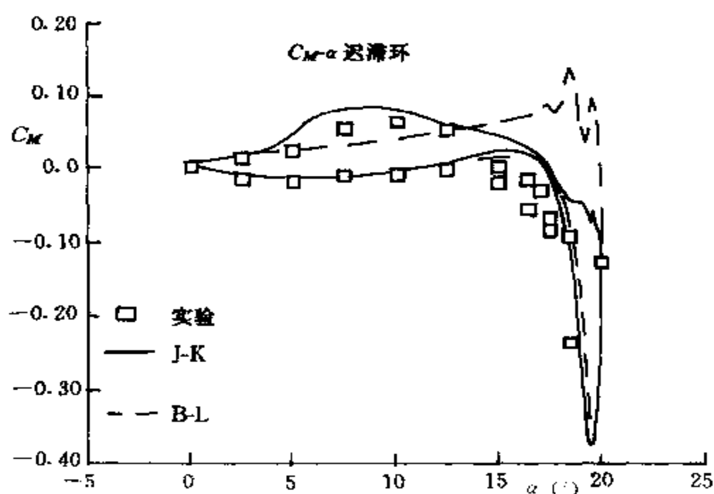


图 5-20　NACA0012 翼型深失速时 C_M 随迎角变化的比较

等取用了前缘置有转捩带，保证翼型上为完全发展的湍流流动的实验数据。计算所用翼型为 NACA0015 翼型，$Ma_\infty=0.3$，$Re_c=2*10^6$，$\alpha(t)=\alpha_m+\alpha_a\sin(t)$，减缩频率 $k=0.1$，$\alpha_a=4.2°$，α_m 分别取 4°，11°，15°以分别对应附着流、轻失速和深失速等不同流态。

图 5-21 给出了 BB 模型与 SST k－ω 模型在附着流状态下计算的 C_L，C_D，C_M 与实验值的比较，可以看出，SST k－ω 模型所给出的迟滞环与实验值很一致，而 BB 模型则不能给出正确的力矩曲线，虽然其阻力计算值与实验值还很吻合。由于两模型计算的非定常压强分布很一致，表明上述差异不是来自非定常的表面压强分布，可能是由于 BB 模型计算的后缘有小的分离而使其计算的力矩变化较小。图 5-22 给出了轻失速状态下计算值与实验值的比较。可以看到，BB 模型计算的后缘分离最大，导致了下俯运动时较低的升力，其迟滞环与实验值最接近。SA 模型计算的后缘分离最小，其迟滞环与实验值相差较大；SST k－ω 模型的结果与 SA 的类似。

图 5-23 和图 5-24 分别给出了深失速状态下一方程模型和二方程模型的计算值与实验值的比较。深失速状态的分析计算是对湍流模型能力的巨大考验，看其能否正确地捕捉到大规模的分离及分离涡在翼面上的运动。图 5-23 表明，BB 模型和 SA 模型给出的升力迟滞环与实验结果的趋势一致，也比较接近，但阻力和力矩的计算结果都延缓了分离；SA 模型算出的分离区小，故给出了较小的阻力和力矩的数值；BB 模型的力矩在下俯运动时出现振荡，但其变化趋势更接近于实验值。图 5-24 表明，k－ω，原始的 k－ω 和 BSL k－ω 等模型都未能算出足够大的分离，因而计算结果与实验值偏离较大；SST k－ω 模型能给出较大的分离流动，其计算结果也就比较接近实验值，与 BB 模型一样，在下俯运动时也存在力矩的振荡。对比图 5-23 和图 5-24 可见，BB 模型和 SST k－ω 模型的计算结果有较一致的变化趋势，都在上仰运动结束时形成了一个后缘分离涡，下俯运动时此涡向尾流区对流出去，并开始形成第二个分离涡。图 5-25 为 BB 模型的流场计算结果，下俯运动时，分离涡在向尾流对流的过程中造成了翼面上载荷的振荡。显然，后缘区与近尾流区的网格会影响这部分解的结果。

上述对比表明，从给出分离的大小对各模型排序，由大到小的次序是 BB，SST k－ω、SA、原始 k－ω 和 k－ε。附着流时 SST k－ω 模型的结果较好，轻失速时 BB 模型较好。对比也表明，目前尚没有一个模型可以准确地计算非定常大分离的流动，特别是对深失速状态，尽管 BB、SST k－ω 和

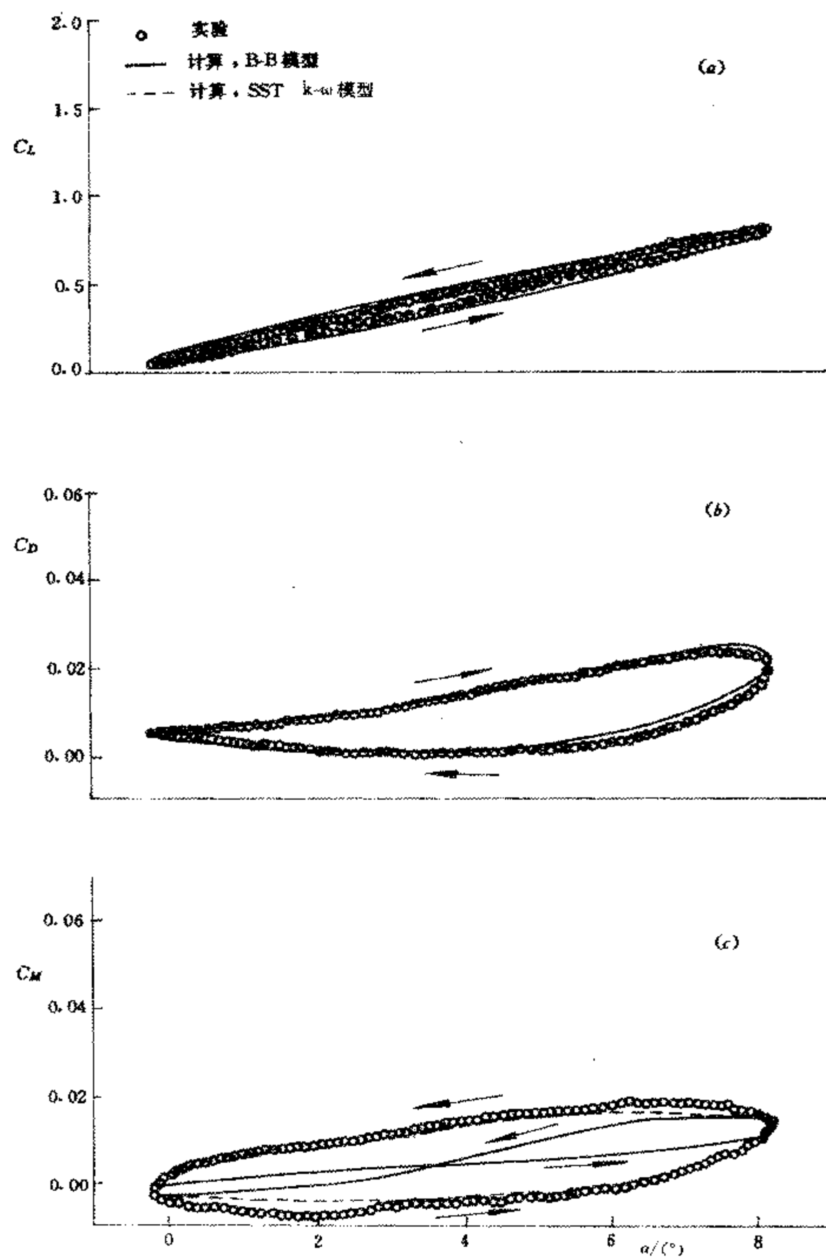


图 5-21 NACA0015 翼型附着流的迟滞曲线的比较

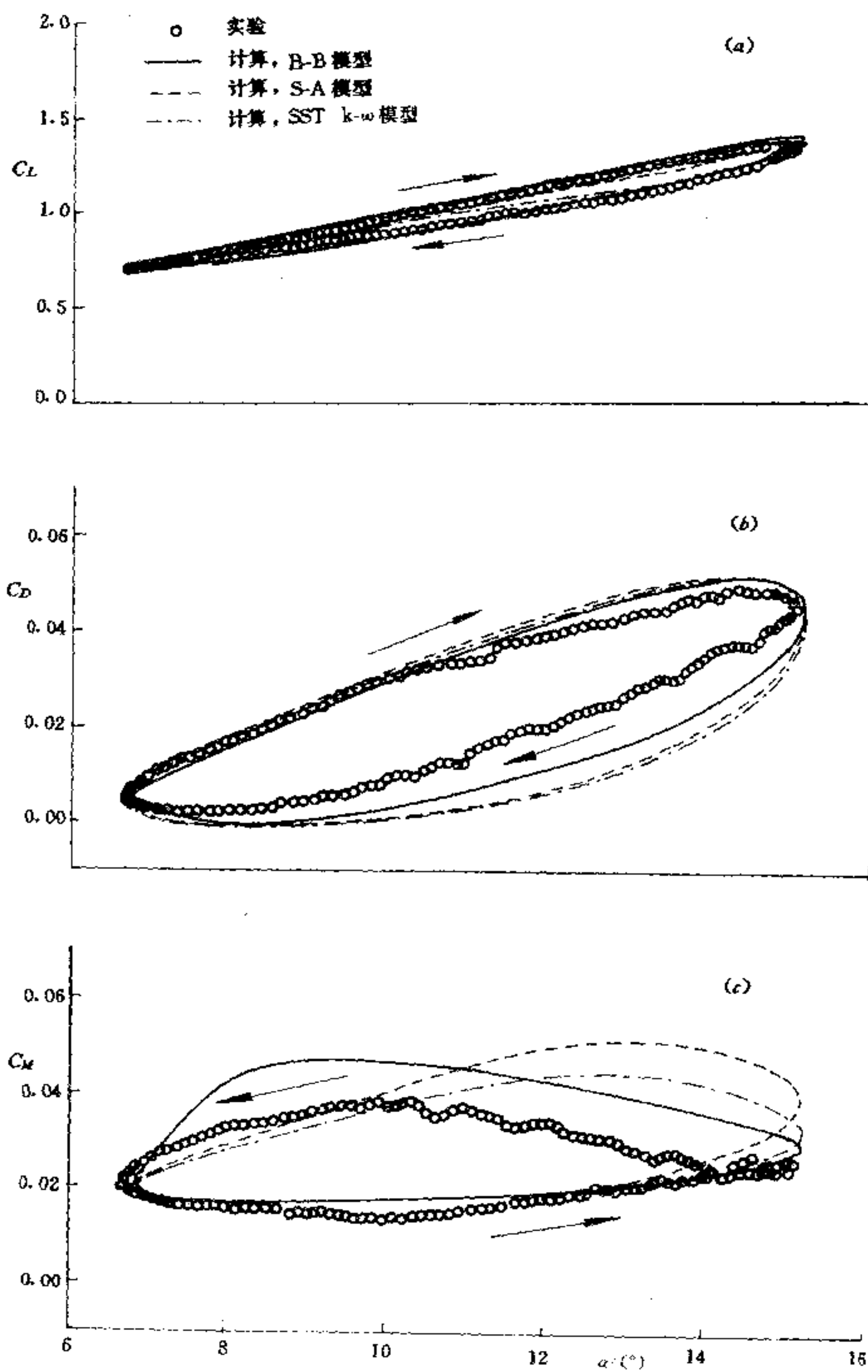


图 5-22 NACA0015 翼型轻失速时的迟滞曲线的比较

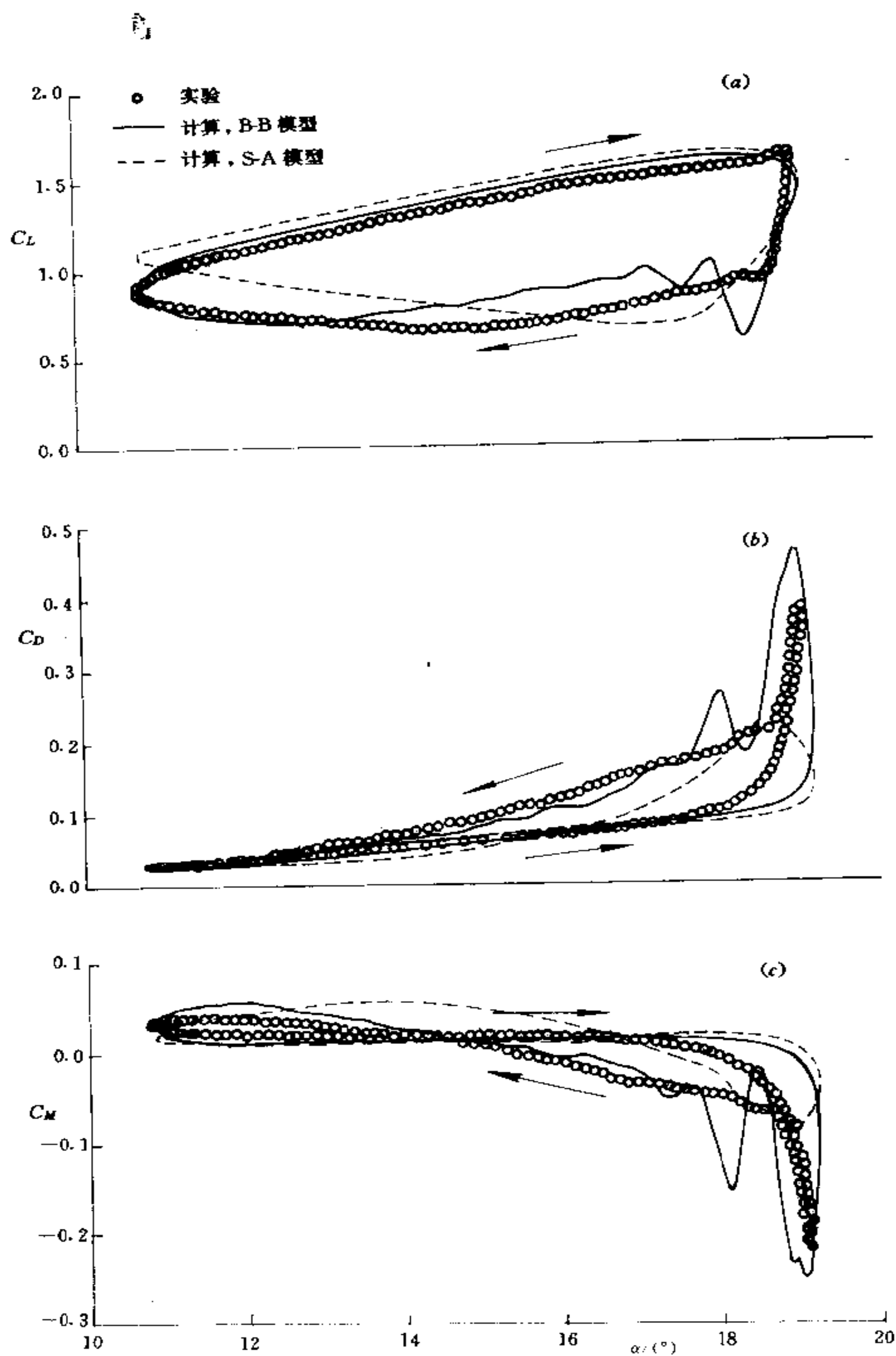


图 5-23　NACA0015 翼型深失速时一方程模型的迟滞曲线的比较

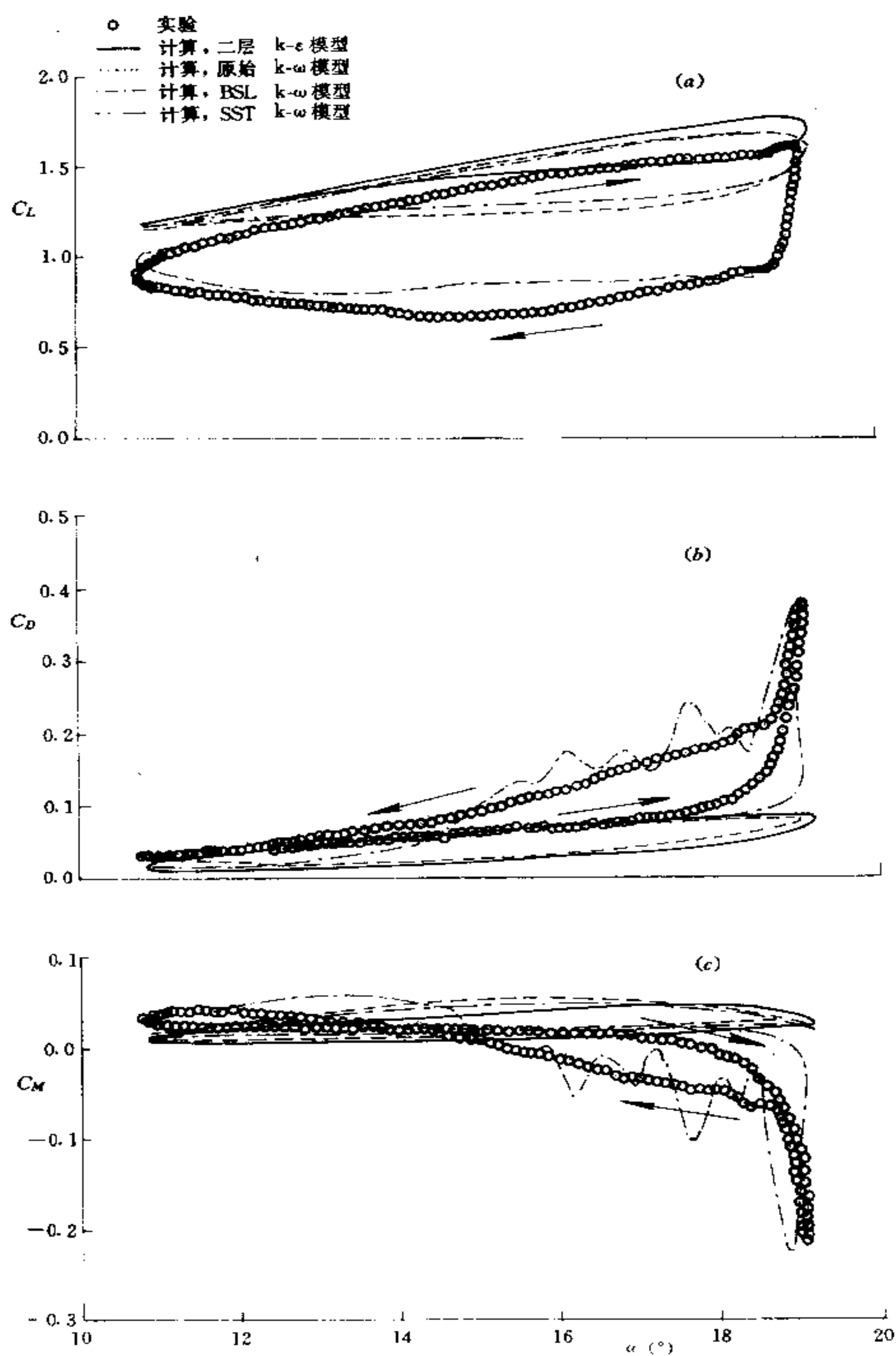
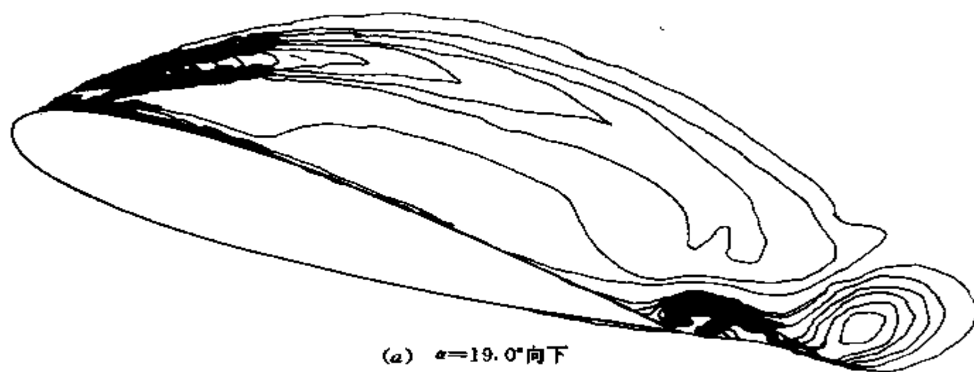
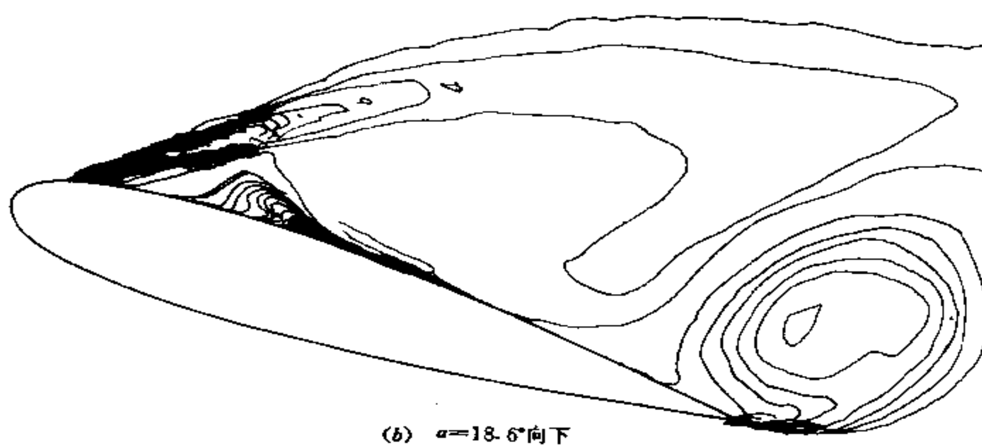


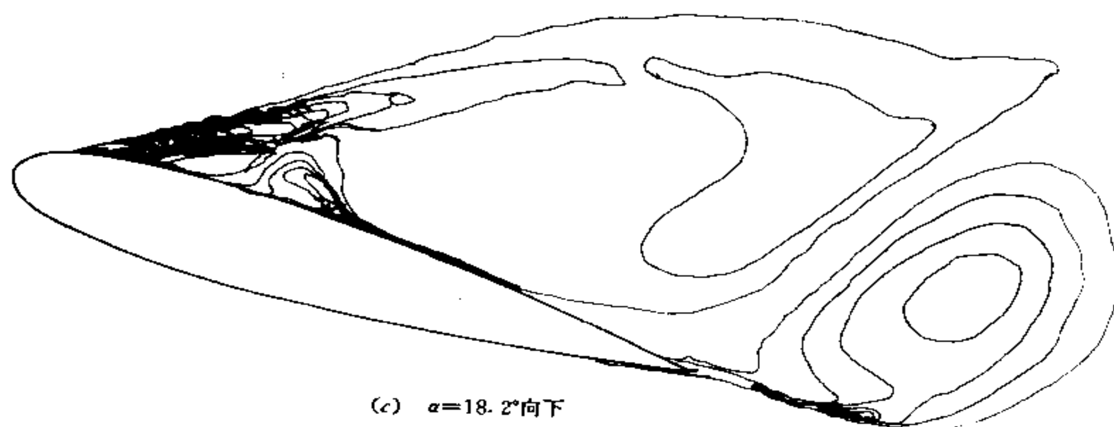
图 5-24 NACA0015 翼型深失速时二方程模型的迟滞曲线的比较



(a) α=19.0°向下



(b) α=18.6°向下



(c) α=18.2°向下

图 5-25 BB 模型计算的旋涡流场

SA 等模型已大大改进了原来的二方程模型。

（三）转捩的影响

Ekaterinaris 和 Menter 分析了 McCroskey 的实验数据(未使用转捩带的部分)，发现实验数据中头部吸力降低是因前缘分离引起的，而非激波造成的，这表明即使雷诺数很大，前缘流动仍是有转捩过程的流动。于是他们分别做了考虑转捩发生的流动计算和完全湍流的流动计算。在前者的计算中假定在前缘吸力峰值点后立即转捩，从驻点至转捩点处为层流流动。图 5-26 给出了他们采用 BB 模型计算 NACA0012 翼型的完全湍流结果和有转捩的结果以及这些结果与实验值的比较。由图可见两种计算结果差异很大，上仰运动时升力、阻力和力矩曲线的计算结果与实验值很一致，下俯运动时，完全湍流的计算结果与实验值差别很大，而转捩解在下俯初期与实验值很一致，但出现的低头力矩和阻力增大的现象与随后出现的比实验中更快的升力恢复和实验结果不太一致，这意味着考虑转捩的解给出了更快的再附。这些不一致是由于转捩模型和湍流模型的不足造成的。速度场的计算分析表明，全湍流计算得到的是后缘分离，有转捩的计算得到的是前缘分离涡的结构并在翼面上得到了更大的分离区，这恰好捕捉到了实验中发现的物理现象。由此可见，前缘处的层流/转捩解对精确计算非定常大分离流动的重要性。

三、三维机翼的绕流

要找到一个适合于三维复杂流动，特别是分离的三维复杂流动的湍流模型至今仍十分困难，不仅是因为我们对湍流机理的认识不足，还因为求解三维 N-S 方程的方法和计算程序中的许多因素或限制也还深入研究得很不够，如方法的截断误差、网格的精度，差分方法中显式或隐式的人工粘性等。

C. L. Rumsey 用迎风型差分方法(其程序为 CFL3D)和中心型差分方法(其程序为 TLN3D)计算 N-S 方程对 ONERA M6 机翼和 Lockheed Wing C 机翼采用几种不同的湍流模型作了对比计算[24]，计算中转捩点固定在离前缘 3%翼弦处。图 5-27 为 M6 机翼在 $Ma_\infty=0.84$，$\alpha=3.06°$，$Re=11.7*10^6$(附着流流态)情况下采用 CFL3D 程序计算的各种湍流模型的结果与实验值的比较。由图可见，各种模型的结果完全一致，并与实验值吻合得很好。事实上采用 TLNS3D 计算的结果与采用 CFL3D 的也很吻合，因而可以说对于三维附着流绕流，现有的各种湍流模型都能给出较为满意的结果。$\alpha=6.06°$时是一种分离流流态，这时的计算结果就会因计算所取的网格密度、计算方法中包含人工粘性的水平而有很大的不同。图 5-28 给出了两种程序在不同人工粘性水平方案下的计算结果。在采用较低人工粘性水平时，即中心差分型的 TLNS3D 程序中用矩阵模型和迎风型的 CFL3D 程序中用通量差分裂(FDS)，都将使激波位置向上游移动而与实验值差别较大。出现这样的结果有两种可能：(1) 在此流态下，流动确实如低人工粘性水平下的计算所显示的是大分离流(甚至还是非定常的)，但这与实验结果有差别，应再设法作出解释；(2) 需要更精细的网格分布以实现真正的“网格收敛”解，因为要使计算程序能给出“正确”解，必须通过减小人工粘性水平和精细网格使截断误差限制在尽可能小的范围内。图 5-29 表示了 $Ma_\infty=0.8447$，$\alpha=5.06°$时用 CFL3D (FDS 方案)和不同湍流模型计算的结果及与实验值的对比。将迎角减为 5.06°的目的是使分离区稍小些以利比较。由图可见，BB 模型计算的分离区最大而使激波前移很多，在翼尖区与实验值相差太大；BL 模型给出的激波位置又太靠下游；JK1992 和 SA 模型有相似的结果，并与实验值较接近。图 5-30 给出了两程序使用同一湍流模型(JK1990A)，但在两种网格下的计算压强分布曲线，四种结果基本都重合，表明此时已实现了网格收敛解。图 5-31 给出了 JK1990A 模型计算出的机翼上表面流态，显示出了复杂的分离流动。对比图 5-29 和图 5-30 可知 JK1990A 模型在这种流动条件下

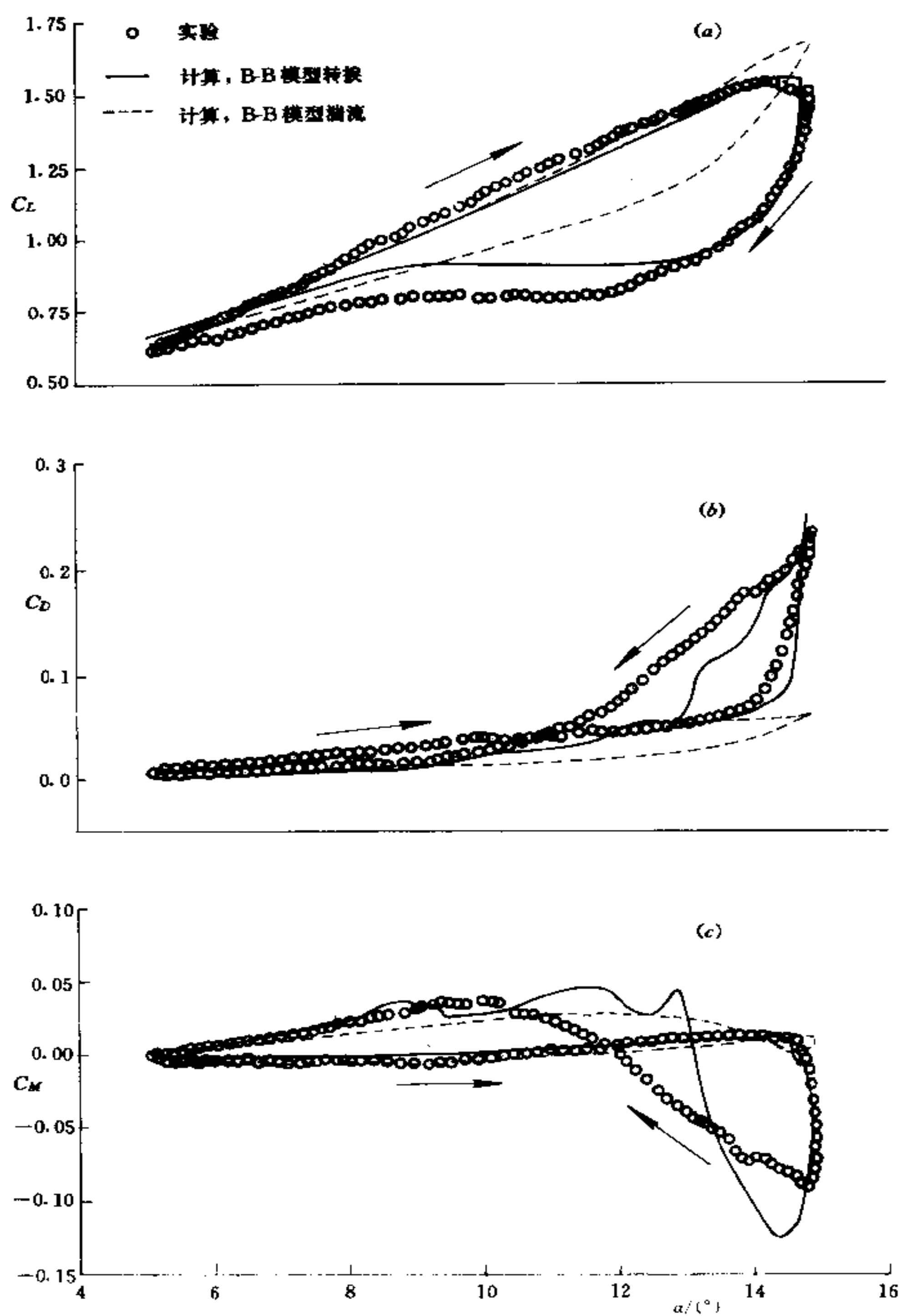


图 5-26　NACA0012 翼型前缘转捩对迟滞曲线的影响

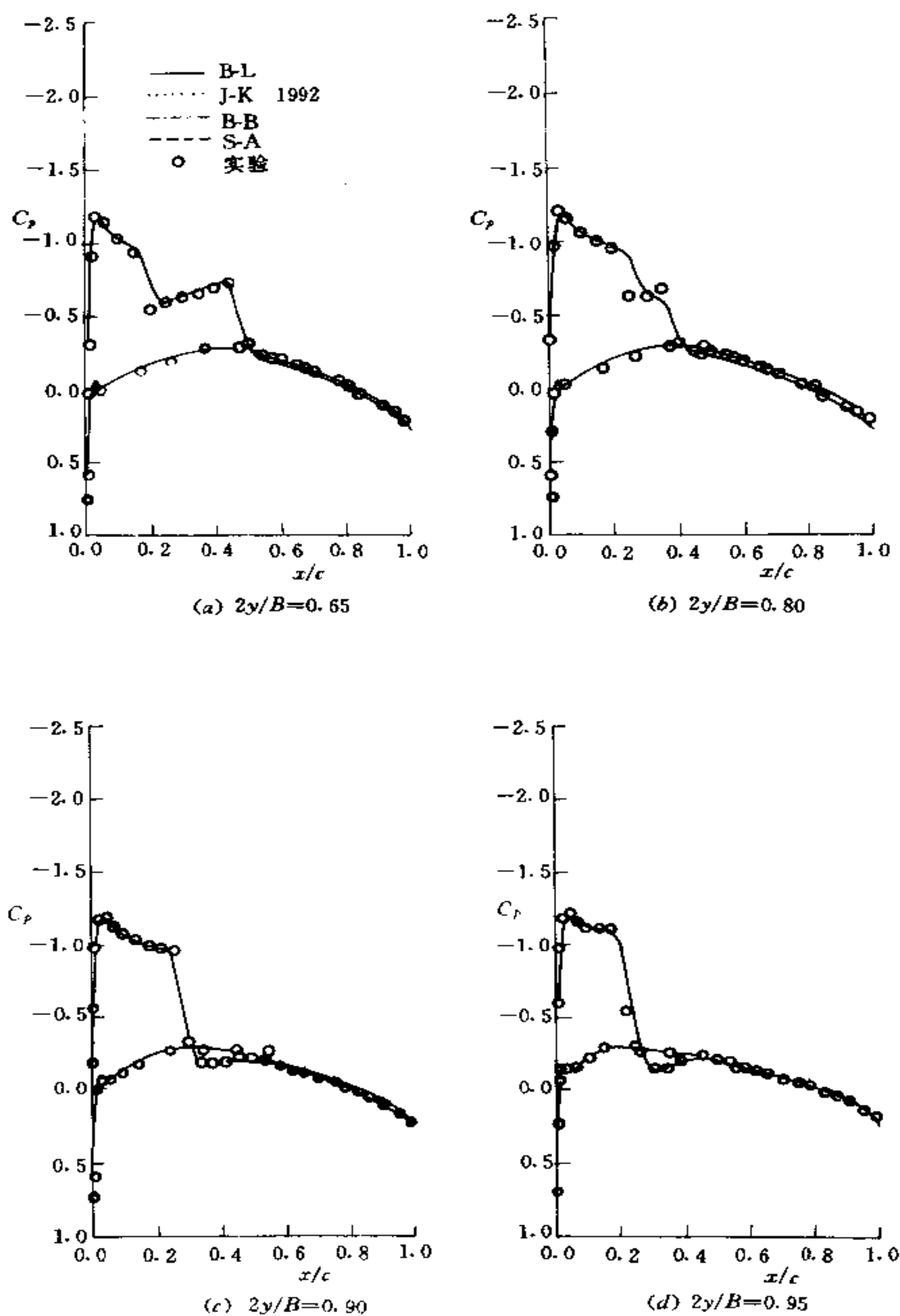


图 5-27 M6 机翼计算的压强分布的计算与实验值的比较

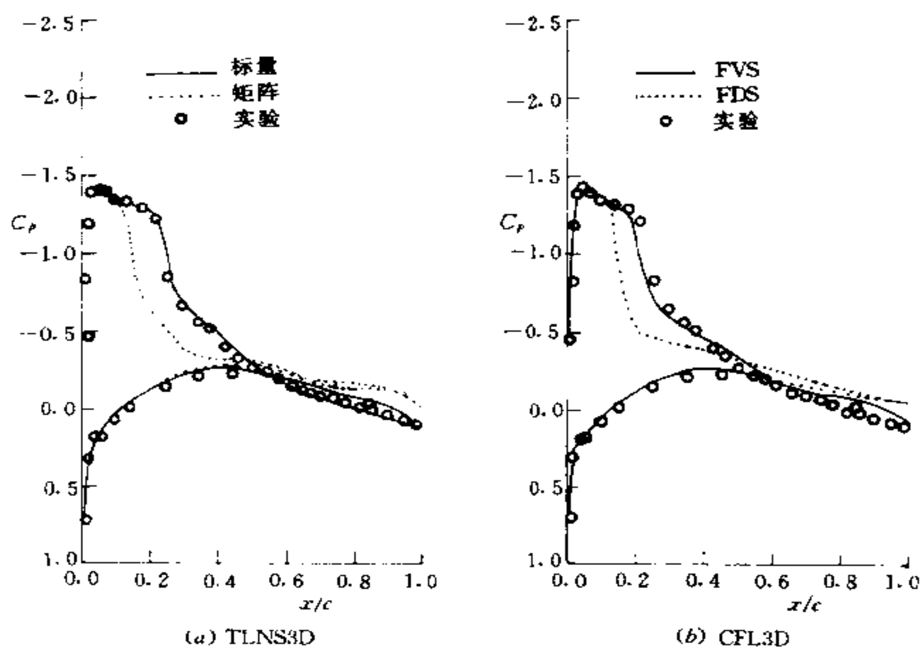


图 5-28 人工粘性对表面压强分布的影响

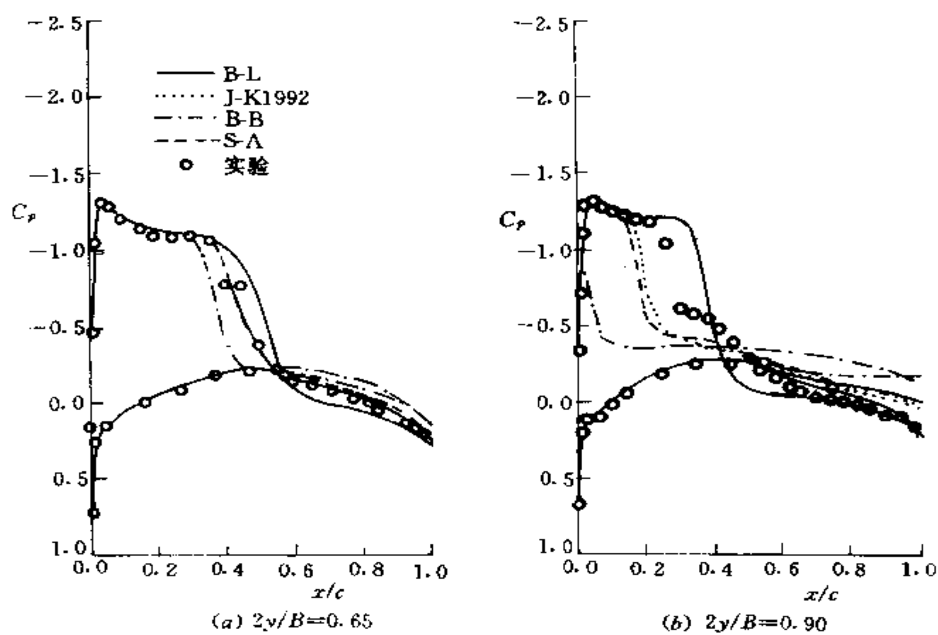
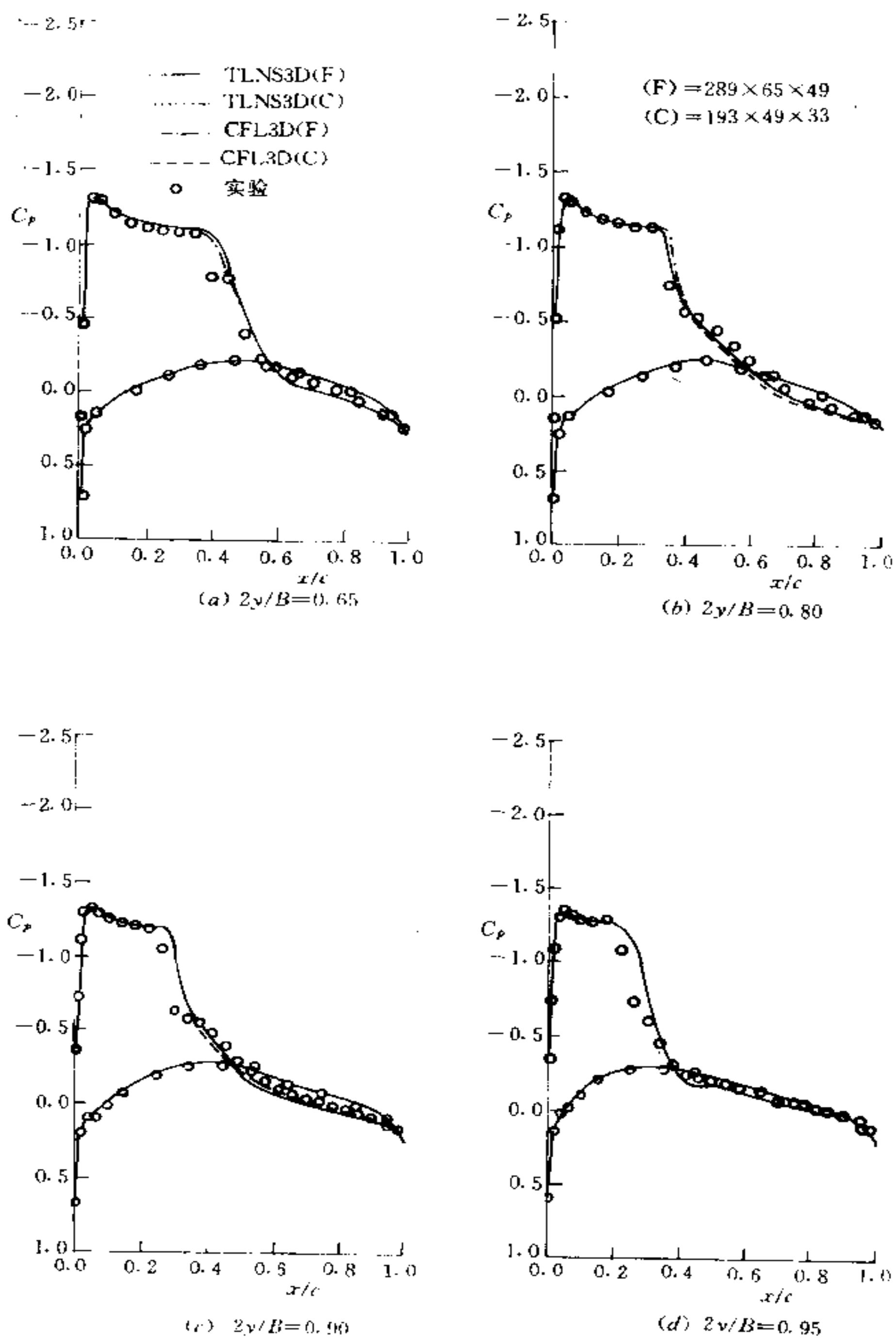


图 5-29 湍流模型对表面压强分布的影响



(a) $2y/B=0.65$

(b) $2y/B=0.80$

(c) $2y/B=0.90$

(d) $2y/B=0.95$

图 5-30　网格的粗细对表面压强分布的影响

$Ma_\infty=0.8447$，　$\alpha=5.06°$　JK1990A 模型

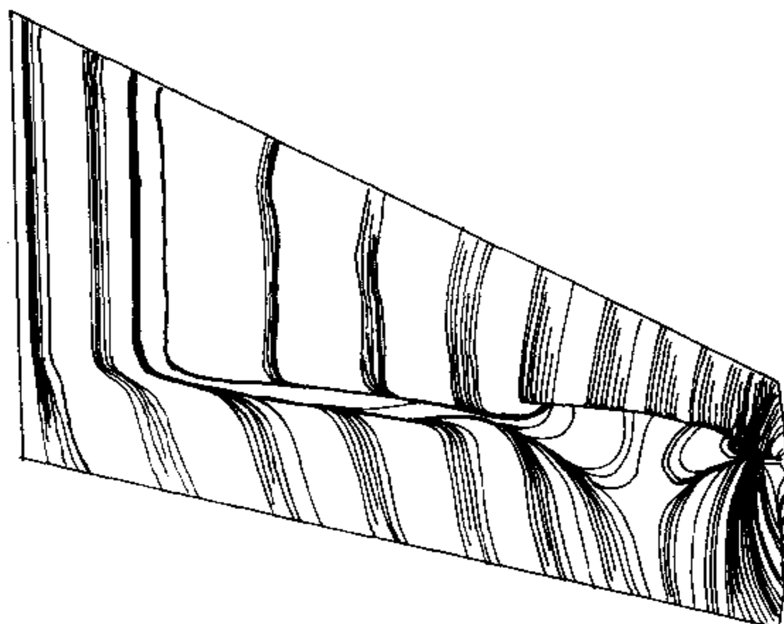


图 5-31　M6 机翼表面流线计算图

$Ma_\infty=0.8447$，　$\alpha=5.06°$

给出的计算结果最好。对 Lockheed Wing C 的计算结果有类似的结论。

三维机翼分离流的比较计算表明，BL 模型算出的激波位置太靠下游，BB 模型的又太靠上游，SA 与 JK1990A 的计算结果相似，又以 JK1990A 的最好。

N. J. Yu 等计算了 Boeing 747-200 翼身组合体在 $Ma_\infty=0.855$，$Re_\infty=2.09*10^6$，$\alpha=2.7°\sim12.73°$时的流动[25]，所用的湍流模型为零方程 BL，半方程 JK 和一方程 BB 三种。在小迎角 $\alpha=2.7°$时，三种模型的计算结果都与实验数据吻合得很好，在机翼外翼段，JK 和 BB 模型的结果更好些。在 $\alpha=5.73°$时，实验中发现机翼上的激波已诱导边界层分离，故是一个局部分离流的流态。图 5-32 给出了这时计算所得的机翼展向各位置处压强沿弦向分布的曲线。可以看到，JK 模型提供了较好的压强分布计算结果，特别在外翼段处（该处激波后的流动已完全分离了）；BB 模型在内翼段的计算结果较符合实验值，而在外翼段的激波位置移向了上游。图 5-33 为 $\alpha=5.73°$时用 JK 模型计算出的表面流线和等压线分布，可清楚看出位于机翼上的强激波和外翼段处激波后的分离流状态。图 5-34 给出了用 JK 模型计算的升力 C_L 随机翼迎角（飞机迎角再加 2°机翼安装角）α 的变化曲线。计算结果和测力实验值直到最大升力处都很一致。上述结果表明求解 N-S 方程的方法可用于分析非设计状态的流动状况。

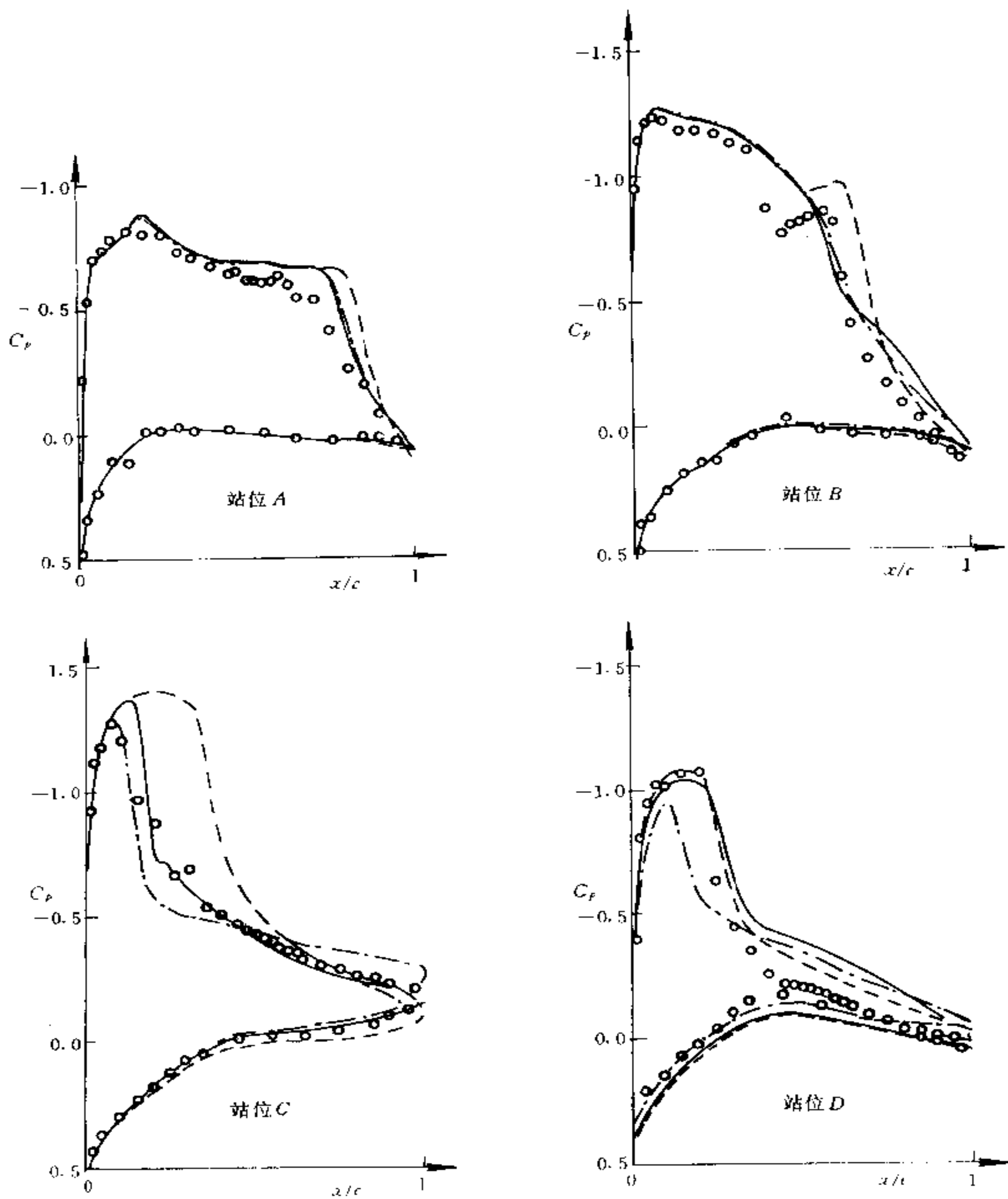


图 5-32 湍流模型对 747-200 翼身组合体的机翼表面压强分布的影响

$Ma_\infty = 0.855 \quad \alpha = 5.73° \quad Re = 2.09 \times 10^6$

JK 模型 - - -BL 模型 —·—BB 模型

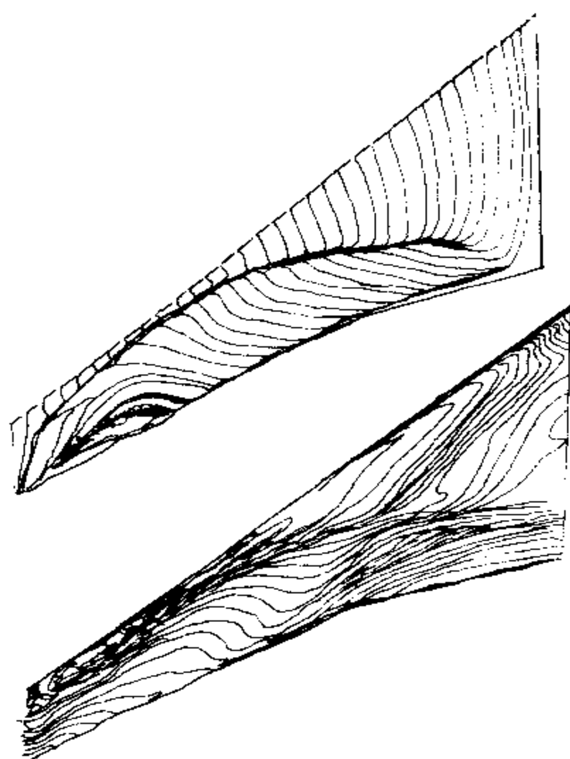


图 5-33　747-200 机翼上表面流线和等压线分布的计算结果

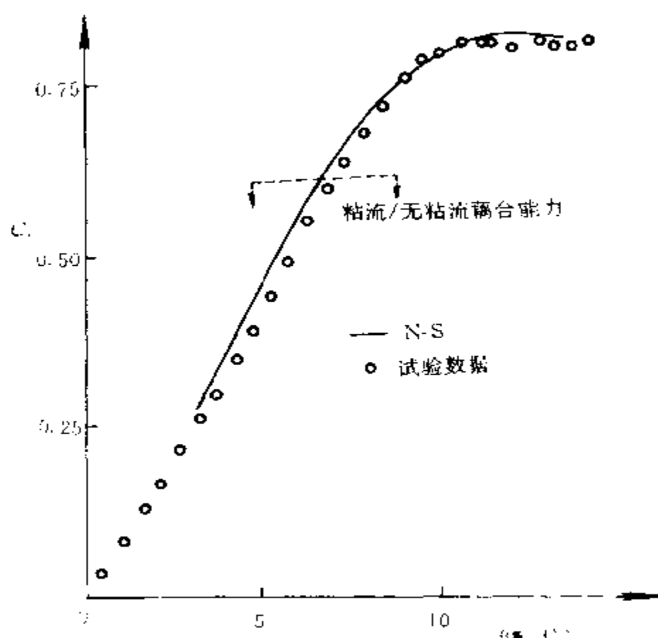


图 5-34　747-200 翼身组合体的升力随机翼迎角变化的比较

$Ma_\infty=0.855$　$Re=2.09\times10^6$, JK 模型

第四节　结束语

由上述简单的分析和讨论可知：

1. 由于对湍流机理的认识不足和目前计算资源的局限性，应用湍流模型似是解决复杂流动数值模拟问题的一个现实可行的主要途径。模型的正确与否对数值模拟的结果举足轻重。

2. 对于定态附着流流态，已有的各简化湍流模型都能给出比较一致的，与实验数据吻合较好的计算结果；但对于分离流动，特别是大范围的分离流动、非定常大分离流动，各模型的计算结果就有一定的差异，有时差别还较大，与实验数据也不完全吻合。由于对模型的评估和验证的研究还很不充分，还难以对各模型作出确切的评价。但可以肯定地说，目前尚不存在一个通用的湍流模型，既能在相当广泛的流动情况中体现出比较正确的主要物理特征，从而给出足够准确的计算结果，又只需要目前或近期能实现的计算资源和可以承受的成本，因此仍需不断改进已有的湍流模型或寻求新的模型。

3. 由于湍流流动的复杂性，已有的模型及新近发展起来的模型对流动的适用情况也各不相同。由于对各模型的评估、验证等研究工作还很不够。目前尚无法总结出各模型对不同流动条件和流动状态的适用能力的趋向规律，因而应对广泛的流动状况用不同的数值方法或计算程序作大量计算，对各湍流模型进行评估、验证等研究。文献[26]对湍流模型研究及应用的现状和未来作了一

个很好的总结，指出尽管湍流模型化技术一直在发展，但仍远远跟不上CFD的发展和需求，为了改变这种状态，湍流模型化研究者、CFD工作者和应用工程师应紧密合作，组成湍流模型联合工作组是一种有效的方法。

4. 考虑到湍流流动的复杂性和未来计算能力的发展，需继续开展更高级的湍流模拟手段和方法的研究，例如大涡模拟或直接数值模拟等。一方面探索湍流机理，提供建立新湍流模型的基础，另一方面探索直接进行复杂湍流流动数值模拟的可能性。

5. 构成计算流体力学计算软件的四个基本要素是：计算格式和方法；网格生成；湍流模型和可视化。湍流模型的研究相比其它三种要素的进展显得较慢，因而湍流模型的研究和发展需要进一步的加强。

参考文献

[1] 是勋刚. 湍流. 天津：天津大学出版社，1994

[2] Cebeci T, Smith A M O. Analysis of turbulent boundary layers. Acad. Press. 1974

[3] Baldwin B S, Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA 78-257

[4] Rotta J C. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Z. Physik. 129:547—572,1951

[5] Rodi W, Spalding D B. A two-parameter model of turbulence and its application to free jets. Wärme und Stroffübertragung. 3:85-90, 1970

[6] Saffman P G. A model for inhomogeneous turbulent flow. Proc. Roy. Soc. London A317;417-433, 1970

[7] Wilcox D C, Traci R M. A complete model of turbulence. AIAA 76-0351

[8] Jones W P, Launder B E. The prediction of laminarization with a two equation model of turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer. 15: 301—314,1972

[9] Wilcox D C, Rubesin M W. Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility. NASA TP -1517, 1980

[10] Wilcox D C. Turbulemce modeling for CFD. DCW industries Inc., La Canada, 1993

[11] Bradshaw P, Ferriss D H, Atwell N P. Calculations of boundary layer development using the turbulent energy equation. J F M. 28: 593-616,1967

[12] Degani D, Shiff L S. Computation of turbulent supersonic flows around Pointed Bodies having crossflow separation. J. of Comp. Phys. 66;173-195,1968

[13] Johnson D A, King L S. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. AIAA J. 23: 1684-1692,1985

[14] Abid R, Vatsa V N, Johnson D A, Wedan B W. Prediction of separated transonic wing flows with nonequilibrium algebraic turbulence model. AIAA J. 28;1426-1431,1990

[15] Johnson D A, Coakley T J. Improvements to a nonequilibrium algebraic trubulence maodel. AIAA J. 28;2000-2003, 1990

[16] Johnson D A. Nonequilibrium algebraic turbulence modeling considerations for transonic airfoils and wings. AIAA 92-0026

[17] Baldwin B S, Barth T. A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall bounded flows. AIAA 91-0610

[18] Spalart P R, Allmaras S R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA 92-0439

[19] Rogers S E, MenterF R, Durbin P A, Mansour N N. A comparison of turbulence models in computing multielement airfoil flows. AIAA 94-0291

[20] Shima E, Egami K, Amano K. Navier Stokes computation of a high lift system using Spalart-Allmaras turbulence model. AIAA 94-0162

[21] Anderson W K, Bonhaus D L. Navier-Stokes computations and experimental comparisons for multielement airfoil

configurations. AIAA 93-0645

[22] Dindar M, Kaynak Ü. Effect of turbulence modeling on dynamic stall of a NACA0012 airfoil. AIAA 92-0027

[23] Ekaterinaris J A, Menter F R. Computation of separated and unsteady flows with one-and two-equation turbulence models. AIAA 94-0190

[24] Rumsey C L, Vatsa V N. A comparison of the predictive capabilities of several turbulence models using upwind and central-difference computer codes. AIAA 93-0192

[25] Yu N J, Allmaras S R, Moschetti K G. Navier-Stokes calculations for attached and separated flows using different turbulence modesl. AIAA 91-1791

[26] Marvin J G, Huang G P. Status and future directions for turbulence modeling. Proceeding of 7th ACFM, India, Dec 8-12,1997

第六章 分区与并行计算

第一节 可压流几何分区计算

一、前 言

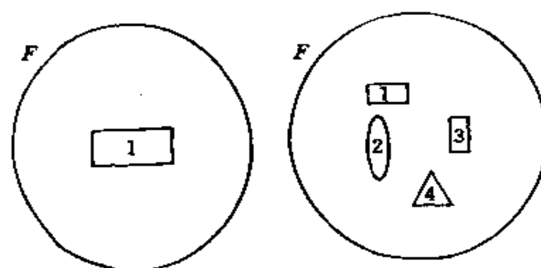
采用贴体结构化网格的分区算法被大量用来计算具有复杂几何形状的流动问题。分区算法的基本思想是这样的：首先将总体区域分成若干个子区域，再对每个子区域分别建立网格，并在每个网格上对方程分别求解。各子区的解在内边界处的光滑则通过耦合条件来实现。这种分区又称几何分区。除几何分区外，还有其它类型的分区：数学分区，如偏微分方程中的Schwarz和Schur区域分裂算法；分块网格加密；物理分区，如Euler方程与N-S方程的匹配；格式分区，即不同区域采用不同格式；并行分区，即将计算域分成数量与并行机器处理器数目相等的小块进行并行计算。

本节只涉及使用结构网格的几何分区算法。为了突出重点，只就可压缩Euler方程进行讨论。主要涉及分区网格的构造、耦合条件的建立及各种理论问题的分析等问题。

二、分区网格的拓扑结构与归类

（一）区域分解

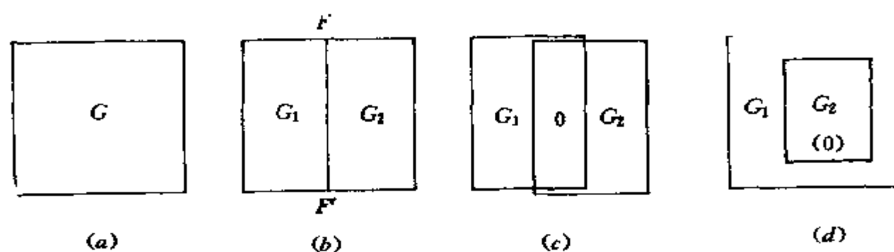
计算区域往往很复杂，可能包含一个物体（如单个机翼）和多个物体（如多段机翼）。图6-1形象地给出了这种可能的计算域。图中F为外边界，数字代表物体。



（a）简单计算域 （b）多连通计算域

图6-1 计算域

无论是何种计算域，分区时将其分成若干个形状尽量规则的子域（子区），以方便在每个子区中独立建立网格。若相邻两子区的分界线（也称周线或内边界）是协调对接的，则此分区网格称对接网格（patched grid）。若相邻两子区含有相互重叠部分，则此分区网格称重叠网格（overlapping grid）。重叠分区又分部分重叠和完全重叠两种。后者也称有层次的（hierarchical）重叠。图6-2以两区为例给出了各种分区情况。图中FF'为内边界，O表示重叠部分。各种分区的优缺点在文献[1]中做了分析。



（a）计算域 （b）对接分区 （c）部分重叠分区 （d）完全重叠分区

图6-2 区域分解

区域分解可以用人工办法，但几何形状特别复杂时，人工分裂很费时间。最近发展了自动分解法[2]，美国 NASA Ames 建立的自动分解软件可以通过点击鼠标产生子区边界，这使区域分解快速省时。自动分解生成的子区数目往往很大，从而使每个子区中的网格点数量很小。而现代机器的特点要求每个子区的网格点尽量多。为了减少子区数量，文献[3]提出了一种最小递减区域合并法，它以前面自动生成的子区集为基准，用最小递减法将可以合并的相邻两子区合并成一个．合并一对后继续寻找新的合并对象，直至不能再合并为止。图 6-3 给出了这样一个合并过程，图中起始时有 12 个子区，逐渐合并后剩下 5 个子区。

（二）**对接网格**

对接网格分角点对接和中点对接两类，见图 6-4。图中 FF' 为对接线，图(a)为角点对接；图(b)

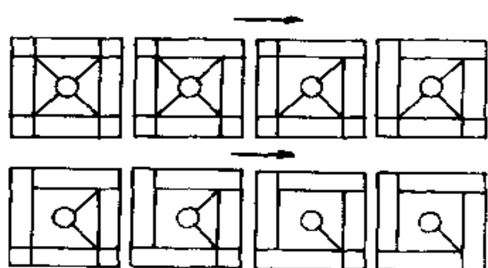


图 6-3　子区合并

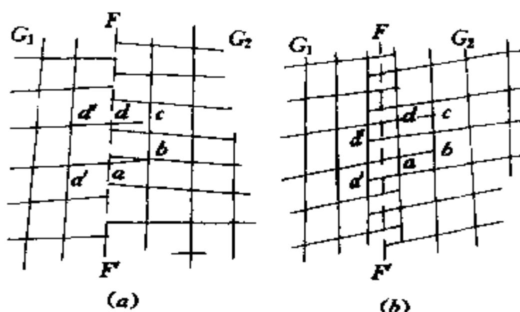


图 6-4　对接网格

为中点对接。角点对接中，相邻子区各有一条网格线(网格单元边界)与对接线重合。对每侧子区，对接线另一侧还附加虚网格单元(内边界单元，如图中的单元 $abcd$)用以定义耦合条件(内边界条件)；中点对接中，相邻子区各有一条网格中点线(网格单元中点)与对接线重合。此时又可分成两种情况：B 类中点对接[4]和 R 类中点对接[5,6]。对 B 类中点对接，耦合条件直接定义在与对接线重合的网格单元上，这时这些单元称内边界单元。对 R 类中点对接，在其中一侧子区对接线以外(即另一侧)附加一些网格单元(内边界单元，如图中单元 $abcd$)用以定义耦合条件(内边界条件)。

（三）**重叠网格**

图 6-5 给出了一组部分重叠网格，重叠区两侧网格任意交错。与对接网格不同，重叠网格在内边界处有两条独立的内边界线(如图中的 $11'$ 和 $22'$)。两条内边界线界定了重叠范围。在两条边界线上的网格单元(如单元 $abcd$ 和 $efgh$)都需通过从另一侧网格插值来定义耦合条件。

图 6-6 给出了一组完全重叠网格，围绕物体 2 的网格(网格 2)完全被包含在围绕物体 1 的网格(网格 1)之中，处于网格 2 周线 F 上的网格单元的耦合条件从网格 1 插值定义，但网格 1 没有明确的被包含在网格 2 中的内边界单元可用于定义耦合条件。为了能使网格 2 中的解正确地反馈到网格 1 中，需要在网格 1 中与网格 2 重叠的部分去掉一些网格从而人为构造一条被严格包含在周线 F 内的内边界 G，然后将网格 2 的解插值到落在内边界 G 的属于网格 1 的单元上构造从网格 2 到网格 1 的耦合条件，这就是所谓的挖洞技术，人为构造的内边界与周线 F 之间的区域类似于部分重叠网格中的重迭区，实际计算中，在被“挖掉”的网格上可继续求解差分格式，这样便于保持结构网格的优点，被“挖掉”的网格上的数值解一般不具备物理意义，因在洞的边界上重新定义了耦合条件，这些非物理解不会传播到洞外的区域。

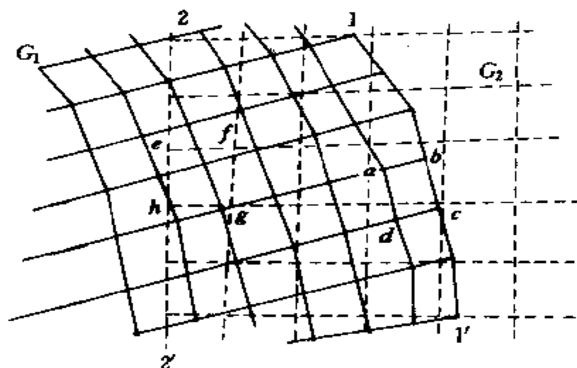


图 6-5　部分重叠网格

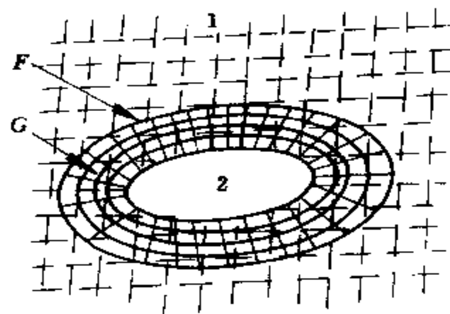


图 6-6　完全重叠网格

三、分区计算的耦合条件

耦合条件的构造是分区计算的关键。这里首先就显式差分格式的对接网格和重叠网格分别给出耦合条件，接着简要说明怎样推广到隐式差分格式。为了简单起见，只用三点格式来讨论。多点格式与三点格式相比多了几个内边界点，每个内边界点可用同样的方法定义耦合条件，因而没有本质区别。这里主要通过一维模型来阐述构造耦合条件的一般原理，对高维问题只作简单的介绍。

一维模型的数学表达式为：

$$w_t + f(w)_x = 0, \qquad t \in \mathbf{R}^+,\ -A < x < B(\text{双曲系统}) \tag{6-1}$$

$$w(x, t=0) = w_0(x), \qquad -A < x < B(\text{初始条件}) \tag{6-2}$$

$$w(x=-A, t) = d(t), \qquad t \in \mathbf{R}^+ (\text{边界条件}) \tag{6-3}$$

式中，w 是守恒变量，$f(w)$是通量函数，为不失一般性，已假定了 $C=\mathrm{d}f(w)/\mathrm{d}w>0$。

为了求解上述初边值问题，将区域分解成两个子域：$D_u=(-A,b)$，$D_v=(-a,B)$。这里，$-a\leqslant b$。如果$-a=b$，则为对接网格(图 6-7)；若$-a<b$，则为重叠网格(图 6-8)。在区域 D_u 和 D_v 中，网格大小分别记为 h_u 和 h_v，在左右两区域中，差分格式(限三点格式)可分别写为：

$$\Delta u_j^n = -\sigma_u(f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^n), j<0; \quad \Delta v_j^n = -\sigma_v(g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n), j>0 \tag{6-4}$$

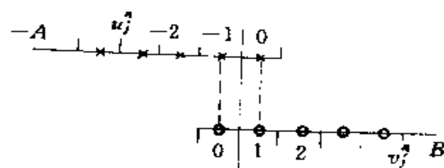


图 6-7　对接网格

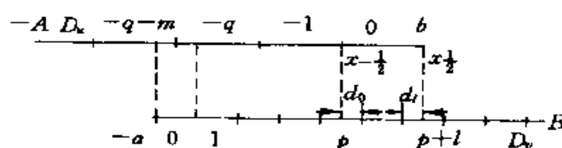


图 6-8　重叠网格

这里 $\sigma_u=k/h_u$，$\sigma_v=k/h_v$，k 为时间步长。f 与 g 为左右子区中相应于函数 $f(w)$的数值通量，$\Delta u_j^n=u_j^{n+1}-u_j^n$，$\Delta v_j=v_j^{n+1}-v_j^n$。子域交接面 $j=0$ 处 u_0^{n+1} 和 v_0^{n+1} 由下面的耦合条件定义。

（一）显式格式的耦合条件

1. 对接网格

对接网格又分为角点对接(图 6-9,图 6-11)和中点对接(图 6-10,图 6-12)两种,根据加密与否,又分为连续交接(图 6-9,图 6-10)和非连续交接(图 6-11,图 6-12)两种。

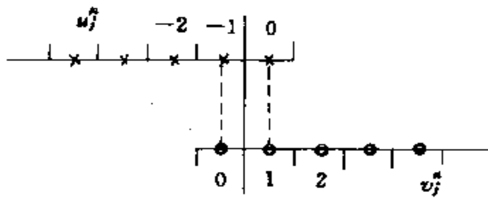


图 6-9　连续角点对接

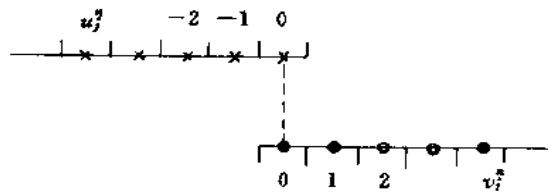


图 6-10　连续中点对接

连续角点对接的耦合条件由下面简单的连续性条件给出:

$$u_0^n = v_1^n, \quad v_0^n = u_{-1}^n \tag{6-5}$$

不连续角点对接的耦合条件可以通过内插得到。例如,通过要求算术平均值和一阶差分在交界面连续,可以得到如下耦合条件:

$$\frac{1}{2}(u_0^n + u_{-1}^n) = \frac{1}{2}(v_0^n + v_1^n), \quad \frac{1}{h_u}(u_0^n - u_{-1}^n) = \frac{1}{h_v}(v_1^n - v_0^n) \tag{6-6}$$

中点对接的耦合条件可以由线性插值给出:

$$u_0^n = \frac{1}{2}(v_1^n + u_{-1}^n), \quad v_0^n = \frac{1}{2}(u_{-1}^n + v_1^n) \quad \text{(连续交接)} \tag{6-7}$$

$$u_0^n = c_u u_{-1}^n + (1 - c_u)v_1^n, \quad v_0^n = c_v v_1^n + (1 - c_v)u_{-1}^n \quad \text{(不连续交接)} \tag{6-8}$$

这里 $c_u=h_v/(h_u+h_v)$,$c_v=h_u/(h_u+h_v)$。另外,可以将中点对接通过重叠另外一个网格(虚网格)转化成两个边界对接[7],也可以在交接点处直接用与内点相似的差分格式给交接条件[4],上面几种耦合条件的特性(稳定性和守恒性等)在文献[7]中做了详细的分析。

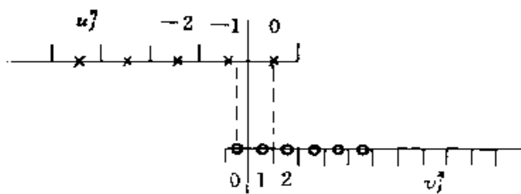


图 6-11　不连续角点对接

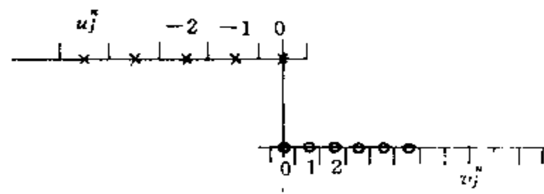


图 6-12　不连续中点对接

2. 重叠网格

当交接面有重叠时,必须引入某种插值来用相邻子域的值来定义耦合条件。最常用的有一般插值、通量插值和再构造插值。

一般插值　用一般插值定义的耦合条件最简单,因而在工程应用中最常用到。文献[8]深入分析了线性插值与高阶插值对分区算法整体精度的影响。

对于图 6-13 所示的分区网格,用线性插值所得的耦合条件为:

$$u_0^n = (1 - \alpha)v_p^n + \alpha v_{p+1}^n, \quad v_0^n = (1 - \beta)u_{-q}^n + \beta u_{-q-1}^n \tag{6-9}$$

式中，$\alpha=d/h_u$，$\beta=e/h_v$，d 和 e 为错位距离。一般插值条件尽管具有良好的稳定性和精度并且能很容易地推广到高维问题，但不能保证守恒，从而在有激波穿过内边界时可能产生较大的误差。

通量插值　由于一般插值可能对激波的位置带来较大误差，所以文献[4]研究了确保守恒的耦合条件。该方法将耦合条件直接定义在数值通量上，差分格式一直求到 $j=0$，未知的数值通量 $f_{1/2}$，$g_{-1/2}$ 由插值给出。若用线性插值，则耦合条件可写成：

$$f_{1/2}=\alpha g_{p+l-1/2}+(1-\alpha)g_{p+l+1/2},\quad g_{-1/2}=\beta f_{-q-m-1/2}+(1-\beta)f_{-q-m+1/2} \tag{6-10}$$

式中，$\alpha=1-d_l/h_u$，$\beta=1-e_l/h_v$，d_l 和 e_l 为错位距离，见图 6-14。原则上也可以用高阶插值定义这类耦合条件，但对于这类特殊的耦合条件，增加插值的阶数却不一定能增加精度。

通量插值虽能保证守恒，但稳定性差且解的唯一性得不到保证。另一缺点是用到高维问题时特别复杂。为了同时保证守恒和稳定性，文献[9]提出了特征通量插值法。另外，文献[10]就多点格式给出了一种混合线性插值，即通量插值耦合条件。

再构造插值　再构造插值耦合条件在文献[9]中提出。它具有良好的稳定性并能保证近似守恒。再构造插值见图 6-14，其具体步骤如下：

① 从子域 D_u 和 D_v 的数值解通过插值得到 $u(x,nk)$ 和 $v(x,nk)$ 的再构造函数 $L(x,u(x,nk))$ 和 $L(x,v(x,nk))$。

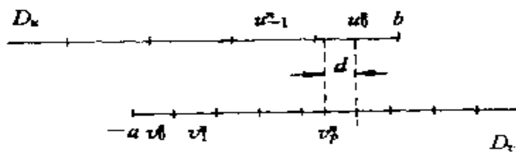


图 6-13　重叠网格

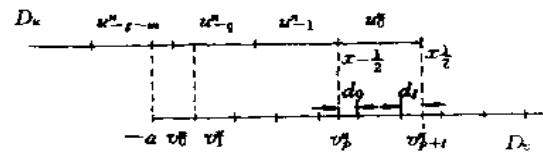


图 6-14　重叠网格

② 精确计算或逼近积分：

$$u_0^n=\frac{1}{h_u}\int_{b-\frac{1}{2}h_u}^{b-\frac{1}{2}h_1}L(x,v^n)\mathrm{d}x,\quad v_0^n=\frac{1}{h_v}\int_{-a-\frac{1}{2}h_v}^{-a+\frac{1}{2}h_2}L(x,u^n)\mathrm{d}x$$

例如，若采用分段常数进行再构造，即 $L(x,u)=u_j$，$x\in(x_{j-1/2}^u;x_{j+1/2}^u)$，$L(x,v)=v_j$，$x\in(x_{j-1/2}^v,x_{j+1/2}^v)$ 和中点积分，就得到：

$$u_0^n=\frac{1}{h_u}\sum_{i=0}^{l}d_i v_{p+i}^n,\qquad v_0^n=\frac{1}{h_v}\sum_{i=0}^{m}e_i v_{-q-i}^n \tag{6-11}$$

这里 d_i，$i=1,2,\cdots,l$ 为子域 D_u 上网格 $j=0$（即 $x_{j-1/2}^u<x<x_{j+1/2}^u$）与子域 D_v 上网格 $j=p,p+1,\cdots,p+l$ 的交。同样可定义 e_i，$i=1,2,\cdots,m$.

（二）隐式差分格式的耦合条件

在应用隐式格式时，几乎毫无例外的把它写成如下的 Δ 形式：

$$L_u\Delta u_j^n=\Delta u_j^*,\ L_v\Delta v_j^n=\Delta v_j^* \tag{6-12}$$

式中，$\Delta u_j^n=u_j^{n+1}-u_j^n$，$\Delta v_j^n=v_j^{n+1}-v_j^n$，$L_u$ 和 L_v 为隐式部分定义的算子，Δu_j^* 和 Δv_j^* 为格式的显式部分。

以连续角点对接为例来说明怎样将上述各类耦合条件推广到隐式差分格式。隐式格式的特点是，时间步 $n+1$ 的任何一点的值与其它网格点的值通过差分算子耦合起来。因此，必须给出 $n+1$ 时刻的耦合条件。但如果将耦合条件写成

$$u_0^{n+1}=v_1^{n+1},\quad v_0^{n+1}=u_{-1}^{n+1} \tag{6-13}$$

则各区的隐式差分算子需联立求解，这就失去了分区法的优点。为了使各子区算子能独立求解。需对耦合条件进行特殊处理。

1. 定常问题耦合条件

对于定常问题，时间精度不重要，所以可用时间滞后条件，即用已知的时间步为 n 的值来定义时间步为 $n+1$ 的值，即令：

$$\begin{cases} u_0^n = v_1^{n-1}, \quad v_0^n = u_{-1}^{n-1} & \text{(显示部分)} \\ \Delta u_0^n = \Delta v_1^{n-1}, \quad \Delta v_0^n = \Delta u_{-1}^{n-1} & \text{(隐式部分)} \end{cases} \tag{6-14}$$

由文献[7]提出的耦合条件(6-14)十分简单且能使各子域的隐式差分格式独立求解。该条件对显式和隐式两部分都引入了时间滞后，因而可称为完全滞后条件。

与完全滞后条件相对应，工程应用中往往用下面的部分滞后条件

$$\begin{cases} u_0^n = v_1^n, \quad v_0^n = u_{-1}^n & \text{(显式部分)} \\ \Delta u_0^n = 0, \quad \Delta v_0^n = 0 & \text{(隐式部分)} \end{cases} \tag{6-15}$$

或

$$\begin{cases} u_0^n = v_1^n, \quad v_0^n = u_{-1}^n & \text{(显式部分)} \\ \Delta u_0^n = \Delta v_1^{n-1}, \quad \Delta v_0^n = \Delta u_{-1}^{n-1} & \text{(隐式部分)} \end{cases} \tag{6-16}$$

条件(6-14)、条件(6-15)和条件(6-16)虽然在形式上只有细微差别，但它们的特性差别很大。条件(6-14)几乎对所有的格式都能保证稳定[7]，而且稳定性与CFL(Courant-Lewy-Friedrichs)数的大小无关。而条件(6-15)和条件(6-16)的稳定性与内点格式有关，通常在大CFL数时引起不稳定。另外，条件(6-16)具有二阶时间精度，而另外两个条件的精度只有一阶。

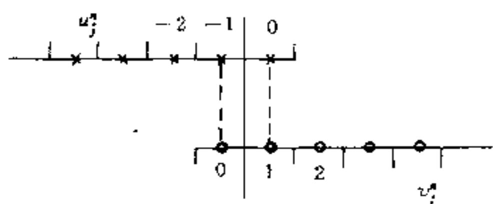


图 6-15　原分区网格

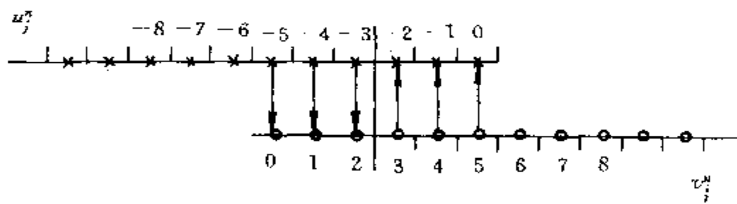


图 6-16　重叠-投影虚拟网格

2. 非定常问题耦合条件

对于非定常问题，既要求各区的格式能独立求解，又能保证具有足够的时间精度，这里给出三种方法：完全迭代法、重迭-投影法和算子并行法。

完全迭代法[6]　该方法的思想是，在每个时间步 n，对差分格式用滞后耦合条件迭代若干次，下面给出最简单的迭代算子。

(1) 对 $l=0$，令 $\Delta u_0^{l,n}=0$，$\Delta v_0^{l,n}=0$。

(2) 对 $l=l+1$，用耦合条件 $\Delta u_0^{l,n}=\Delta v_1^{l-1,n}$，$\Delta v_0^{l,n}=\Delta u_{-1}^{l-1,n}$ 求解方程 $L\Delta u_j^{l,n}=\Delta u_j^*$，$L\Delta v_j^{l,n}=\Delta v_j^*$。

(3) 根据收敛程度，回到上一步或退出迭代，并令 $\Delta u_j^n=\Delta u_j^{l,n}$，$\Delta v_j^n=\Delta v_j^{l,n}$。

如果 L 属于椭圆算子，则上面的迭代是收敛的。完全迭代法的缺点是，迭代过程太耗时间。

重叠-投影法　对于任一格式，数值波在每一时间步传播的距离不超过CFL个网格点。基于这一实事，在内边界引入含有2CFL个网格点的虚拟重叠，用滞后耦合条件。在虚拟重叠部分因滞后条件引入的不精确解通过投影网格另一侧的精确解来代替。以图6-15的网格为例，加上虚拟重叠

后成图 6-16。定义 $p=L_o/2$。图 6-15 对应 $p=3$ 和 $L_o=6$。耦合条件分下面几步定义：

(1) 时间滞后条件 $\Delta u_0^{n+1}=0, \Delta v_0^{n+1}=0$。

(2) 求解各区的差分格式。

(3) 重叠区解的投影($p=L_o/2$)：$u_{l+1}^{n+1}=v_{L_o-l}^{n+1}$，　$v_{l-1}^{n+1}=u_{-L_o+l}^{n+1}$，　$l=1,2,\cdots,p$。

重叠-投影法非常简单而且时间精度高，但 CFL 值很大时在重叠部分损失的计算时间占的高比重会影响方法的效率。

算子并行法　假定格式隐式部分为三对角算子，通过构造属于交接面的子系统来获得精确的耦合条件[11]。

四、多维问题耦合条件

(一) 对接网格

中点对接和角点对接耦合条件的构造方法基本相同，Rai 最早用通量插值构造中点对接的耦合条件[5,6]。他的方法用的是前面定义的 R 类中点对接，在左侧网格对接线外侧将耦合条件定义在传统的守恒变量上。由此可以得到周线上的数值通量，而右侧网格的耦合条件则定义在数值通量上，从左侧网格周线数值通量直接插值得到。Rai 方法基于单元角点法和迎风格式，后来被推广到单元中心法和中心差分格式，如 Wang & Caughey[12]。Berger[4]用的是前面定义的 B 类中点对接网格，内边界单元上的耦合条件直接通过构造与内点类似的差分格式构造。

Lerat 和 Wu[7]用局部通量构造法对角点对接建立了守恒和无条件稳定的耦合条件。基本原理是这样的，先找出交接线上被两侧网格线划分的最小线段，通过以最小线段界定的小单元来计算最小线段上的数值通量，然后把最小线段上的数值通量投影到左右网格的边线上，达到守恒耦合。

通过在对接线上重叠一狭长的虚网格将中点对接转换成两个角点对接，就可以用角点对接的耦合条件来处理中点对接网格。

下面介绍 Lerat&Wu 的角点对接守恒耦合条件。

所考虑的对接网格如图 6-17(a)所示，为了求解单元 $AA'B'B$ 中点的差分格式，需要求出线段 AB 上的数值通量。线段 AB 被网格线 CD 分成 AC 和 CB 两部分(更一般的情况下被分成多个小线段)。

设左边区域任意内单元边界$(i+\frac{1}{2},j)$上的数值通量具有如下表达式

$$f_{i+\frac{1}{2},j}=\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{i,j}^{n-\sigma},u_{i-1,j}^{n-\sigma})$$

式中 $\theta_{\sigma}^{(u)}$ 为常数。

于是对于左边区域，AB 上的数值通量由下式计算：

$$f_{\frac{1}{2},j}=f_{AC}+f_{CB} \tag{6-17}$$

$$f_{AC}=\alpha_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j}^{n-\sigma}) \tag{6-18}$$

$$f_{CB}=(1-\alpha_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j+1}^{n-\sigma}) \tag{6-19}$$

式中 $\alpha_j=|AC|/|AB|$。

设右边区域任意内单元边界$(i+\frac{1}{2},j)$上的数值通量具有如下表达式：

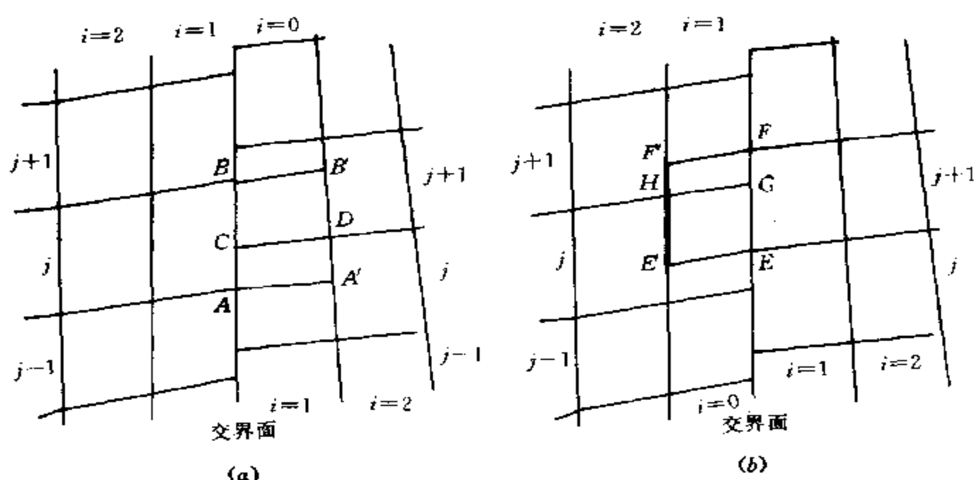


图 6-17　对接网格

$$g_{i+\frac{1}{2},j}=\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(u_{i,j}^{n-\sigma},u_{i+1,j}^{n-\sigma})$$

对于右边区域,EF(图 6-17(b))上的数值通量由下式计算:

$$g_{\frac{1}{2},j}=g_{EG}+g_{GF} \tag{6-20}$$

$$g_{EG}=\beta_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{1,j}^{n-\sigma},u_{1,j}^{n-\sigma}) \tag{6-21}$$

$$g_{GF}=(1-\beta_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{1,j}^{n-\sigma},u_{1,j+1}^{n-\sigma}) \tag{6-22}$$

式中 $\beta_j=|EG|/|EF|$。

Lerat 和 Wu 证明了条件(6-17)～条件(6-22)既保证守恒又保证稳定。

如果使用隐式格式来求解定常问题,则像一维问题一样,构造相应的时间滞后条件。例如,在条件(6-17)～条件(6-22)中引入时间滞后,便得到:

$$f_{AC}=\alpha_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j}^{n-\sigma-1}) \tag{6-23}$$

$$f_{CB}=(1-\alpha_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j-1}^{n-\sigma-1}) \tag{6-24}$$

$$g_{EG}=\beta_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{1,j}^{n-\sigma},u_{1,j}^{n-\sigma-1}) \tag{6-25}$$

$$g_{GF}=(1-\beta_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{1,j}^{n-\sigma},u_{1,j+1}^{n-\sigma-1}) \tag{6-26}$$

滞后耦合影响时间精度和收敛速度,如果是连续对接网格,则可构造更好的耦合条件。例如,Rosenfeld & Yassour[13,14]提出了称为 ADMZI(alternating direction multi-zone implicit)的方法。原理实际上很简单,以图 6-18 中由 G_1 和 G_2 通过对接线组成的对接网格为例,考虑 ADI 隐式格式的求解方式,根据不同的扫描方向将区域进行重新组合。例如,在 x 方向扫描时,区域重新组合成图 6-18 所示的 A,B 两区,这样求解往 x 方向扫描的隐式部分时,就不会遇到内边界。同理,在 y 方向扫描时,区域重新组合成图 6-18 所示的 C,D 两区,从而求解往 y 方向扫描的隐式部分也不会

遇到内边界。

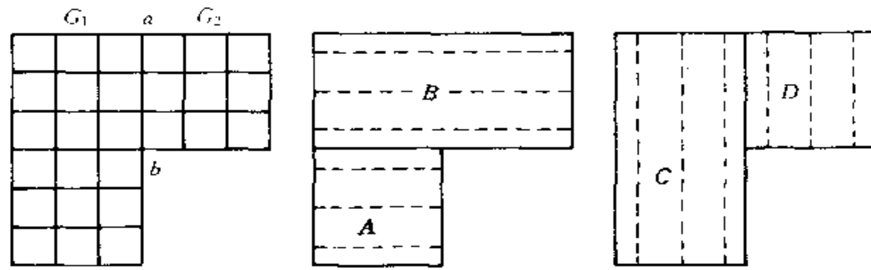


图 6-18　连续对接网格的 ADMZI 方法

（二）重叠网格

重叠网格的耦合条件多种多样，这里就二维问题对几种典型的耦合条件进行描述。

一般插值　在工程问题上，直接对守恒量插值被广泛用于定义重叠网格的耦合条件，插值耦合条件的构造和精度分析在文献[8]中进行了详细的介绍。这里就线性插值对基本原理进行简单的介绍，所依据的网格见图 6-19，左(G_1)右(G_2)网格享有由 1-1′和 2-2′两条边界线界定的重叠区。子区 G_1 中紧靠边界线 1-1′的网格单元上的值用子区 G_2 相邻网格单元中点上的值进行线性插值。同样，子区 G_2 中紧靠边界线 2-2′的网格单元上的值用子区 G_1 相邻网格单元中点上的值进行线性插值。

先考虑从子区 G_2 到 G_1 边界的插值，以 G_1 边界上网格单元 $abcd$ 为例，该单元中点上的值通过下面的双线性表达式得出：

$$q(x,y) = q_1 + q_2x + q_3y + q_4xy \tag{6-27}$$

为了求得系数 $q_l(l=1,2,3,4)$，将子区 G_2 上与单元 $abcd$ 相邻的四个单元 3，4，5，6 中点的已知值 $q_{x_3,y_3}, q_{x_4,y_4}, q_{x_5,y_5}, q_{x_6,y_6}$ 代入式(6-27)，得四个方程，由此可以唯一地确定系数 $q_l(l=1,2,3,4)$。

现在考虑从子区 G_1 到 G_2 边界的插值，以 G_2 边界上单元 $efgh$ 为例，该单元中点上的值通过下面的双线性表达式得出：

$$q(x,y) = q_1 + q_2x + q_3y + q_4xy \tag{6-28}$$

为了求得系数 $q_l(l=1,2,3,4)$ 将子区 G_1 上与单元 $efgh$ 相邻的四个单元 7，8，9，10 中点的已知值 $q_{x_7,y_7}, q_{x_8,y_8}, q_{x_9,y_9}, q_{x_{10},y_{10}}$ 代入式(6-28)，得四个方程，由此可以唯一地确定系数 $q_l(l=1,2,3,4)$。

通量插值　二维重叠网格的通量插值的基本原理已在文献[4]原文中做了介绍并在文献[9]中得到了应用和改进。考虑图 6-20(a)中的内边界单元 $AA'B'B$，为了计算该单元中点的值，需要先求出与内边界重合的单元边界 AB 上的数值通量 $\boldsymbol{h}^*_{BA}$，该数值通量用左边网格单元边界上的数值通量进行线性插值求得，具体算法如下：

(1) 将 AB 分成若干小线段，使得每一小线段被包含在 G_1 的一个单元网格中(如图中的 BE，EA)；

(2) 用 G_1 中的数值通量内插到每个小线段的中点(如图中 C，D)具体插值公式参见文献[4，9，15]。

(3) 将各小线段的数值通量相加，得 AB 总的数值通量，如对于图中所示的情况，有 $\boldsymbol{h}^*_{BA}=\boldsymbol{h}^*_{BE}+\boldsymbol{h}^*_{EA}$。

通量插值法能保证守恒，但稳定性不好而且定常解可能不唯一。文献[3]中将上述通量插值法改进成特征通量插值并配以非线性滤波算子，克服了上述困难。

再构造插值　考虑 G_2 中的内边界单元 $ABCD$(图 6-20(b))，该单元被 G_1 中的网格线分割成若

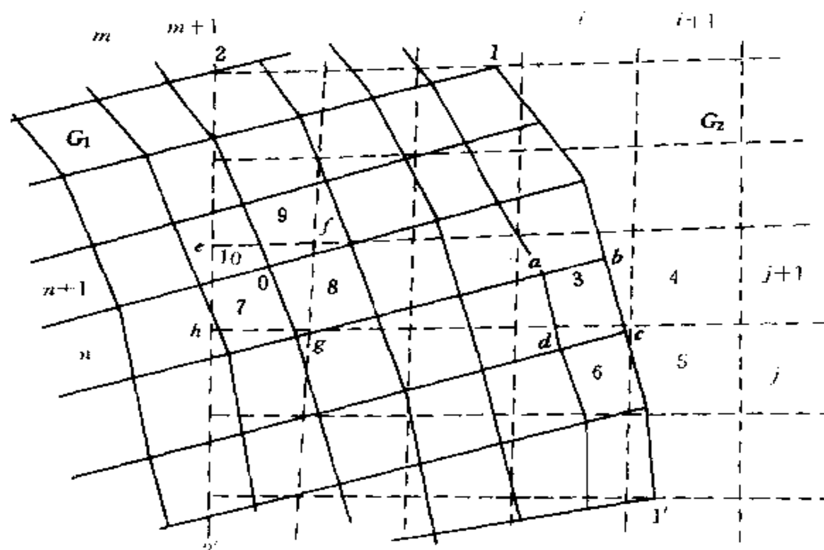


图 6-19 重叠网格

干个多边形($P_l, l=1,2,\cdots,5$),用如下积分式计算单元 $ABCD$ 上的条件 w:

$$\int_{ABCD} w\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_l \int_{P_l} w(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式右端中,每个积分域 P_l 上的被积函数 $w(\boldsymbol{x})$ 用网格 G_1 中的数值解进行重构造,最简单的办法是用分段常数重构造,即用 G_1 中包含 P_l 的单元中点值直接赋给 $w(\boldsymbol{x}\in P_l)$,精度更高的办法是用分段线性重构造,即用 G_1 中与 P_l 相邻的几个单元的值通过线性插值来定义 $w(\boldsymbol{x}\in P_l)$,这样便有 $w(\boldsymbol{x}\in P_l)=a+bx+cy$。注意到积分关系式 $\int_P (a+bx+cy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = P$ 的面积$(a+bx_c+cy_c)$。其中 (x_c, y_c) 为 P 的几何重心。因此为了求每个多边型上的积分,只须保存多边形的几何重心和面积就够了。

(三) 重叠-对接混合网格

前面介绍的重叠网格的耦合条件都用到相邻两区域之间的双向插值。这些方法或者不保证守恒性;或者不保证解的唯一性;或者太复杂。相比之下,前面介绍的对接网格方法既简单,又能保证守恒和解的唯一性。于是自然提出这样一个问题:可否将重叠网格的交界面转换成对接网格的交界面,从而用对接网格的耦合条件来构造重叠网格的耦合条件?答案是肯定的。Wang[16]就是利用这一方法来构造重叠网格守恒的耦合条件的。

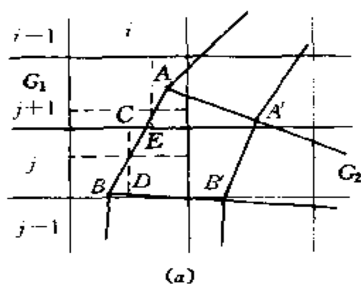
Wang 的方法可以很形象地通过图 6-21 来描述。图(a)中设网格 A 与网格 B 享有重叠区 O,区 O 的周边为 $F_{bo}\cup F_{ao}$。图(b)中将网格 A 去掉重叠部分后剩下的 A-O 通过周边 F_{bo} 与网格 B 耦合,就成了转换后的对接网格。在对接边界 F_{bo} 上,便可像前面的对接网格一样,通过数值通量守恒来构造守恒的耦合条件。具体构造如下。

首先将网格 A 中的控制容积分成三类:

① 截断单元　即网格 A 中被周边 F_{bo} 截断的单元,图中以符号+标出;

② 正常单元　即网格 A 中既未被周边 F_{bo} 截断,又未被 B 重叠的单元,图中以符号 x 标出;

③ 洞藏单元　即网格 A 中未被周边 F_{bo} 截断,但被 B 重叠的单元,图中以符号 O 标出。



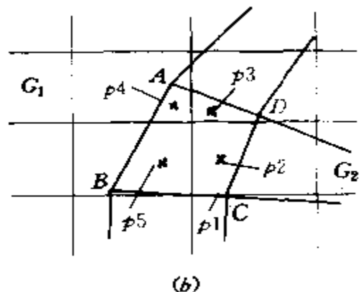
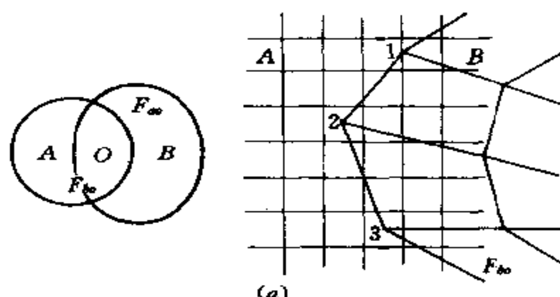


图 6-20　二维插值网格



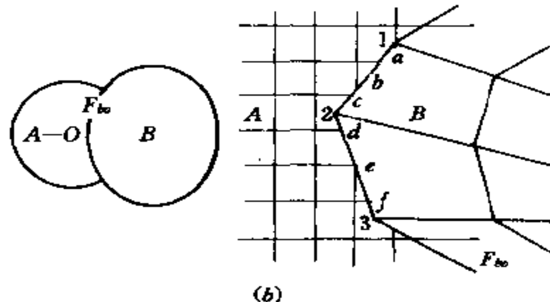


图 6-21　重叠网格向对接网格的转换

洞藏单元被去掉因而不再对差分格式求解，正常单元上差分格式的求解不变。于是，截断单元上差分格式的求解成了本方法的关键。注意到周边 F_{bo} 被 A 中的水平网格线分成了许多小线段，如图中的 $1-a$，$a-b$，$b-c$，$c-2$，等。为了求出截断单元中的变量，必须先求出通过这些小线段上的数值通量。Wang 所提的小线段上的数值通量计算方法中由两部分构成：重构造(Reconstruction)和黎曼算子(Riemann slover)。

重构造　用重构造来计算每一小线段中点(X_c)左侧的值 $Q^{(L)}$ 和右侧的值 $Q^{(R)}$。最简单的办法，用距中点 X_c 最近的左(右)侧单元中点的值赋给 $Q^{(L)}(Q^{(R)})$。更精确的办法是利用如下的线性插值：

$$q(x,y)=q_o+q_x(x-x_o)+q_y(y-y_o) \tag{6-29}$$

例如，为求了 $Q^{(L)}$，在线段左侧找距 X_c 最近的三个单元。将三个单元中点上的已知值代入式(6-29)，便可求出系数 q_o，q_x，q_y，然后再利用(6-29)，便可求出 $Q^{(L)}=q(x_c)$。

黎曼算子　有了 $Q^{(L)}$ 和 $Q^{(R)}$，便可以用传统的黎曼算子计算数值通量，为了不使问题过于复杂，一般用与内点相同的黎曼算子。

该方法既保留了重叠网格网格构造灵活的优点，又结合了对接网格守恒耦合条件构造简单的优点。

五、分区计算的理论问题

这里用前面介绍的一维分区模型来研究分区算法所涉及的理论问题，包括守恒性、稳定性、收敛性和解的唯一性。首先介绍分析方法，再对前面介绍的一维分区模型进行分析并列举数值结果加以讨论。

（一）理论基础

1. 耦合条件的守恒性分析　对于守恒系统(6-1)，定义 $I(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)dx$，则有 $\frac{dI(t)}{dt}=0$，因此，I 为守恒量。对于数值方法，同样定义 $S^n=\sum_{j=-\infty}^{\infty} hw_j^n=I(nk)+O(h^p)$。式中，$k$ 和 h 分别为时间和空间步长。对于分区算法，S^n 可以分裂成属于每个子区和重叠域的三部分，即：$S^n=S^n_{x<a}+S^n_{x>b}+S^n_{a<x<b}$。

定理 6.1[4]　如果 $p>0$ 并且对任何 n 都有 $S^{n-1}=S^n$，则分区算子(6-4)的解在网格收敛时收敛到系统(6-1)～系统(6-3)的弱解。

如果对于守恒格式，有 $S^{n+1}=S^n, \forall\ n\geqslant 0$，则称耦合条件是守恒的。

2. 差分格式的正规模态分析(normal mode analysis)　为了进行理论分析，假定系统(6-1)及相应的数值方法都是线性的，将差分格式及初边值条件对时间和空间分别进行傅里叶变换和拉普拉斯变换后，解(正规模态)可以写成：

$$u_j^n=z^n k_u^j u_0,\quad k_u\in\mathbf{C};\quad v_j^n=z^n k_v^j v_0,\quad k_v\in\mathbf{C}$$

式中，$z\in\mathbf{C}$，k_u 和 k_v 分别为三点格式(6-4)特征方程的根，将正规模态解代入格式(6-4)，左右两端分别除以 z^n，$k_u^j u_0$ 或 $k_v^j v_0$ 后得如下特征方程：

$$z-1=-\sigma_u f(z,k_u)(k_u-1),\ z-1=-\sigma_v g(z,k_v)(k_v-1) \tag{6-30}$$

对每个 z，特征方程(6-4)各有两个根(多点格式的根更多)，即 k_{u_1},k_{u_2} 和 k_{v_1},k_{v_2}。不失一般性，可令 $|k_{u_1}|\leqslant|k_{u_2}|$，$|k_{v_1}|\leqslant|k_{v_2}|$。因而通解的一般形式是：

$$u_j^n=z^n k_{u_1}^j u_1+z^n k_{u_2}^j u_2,\quad v_j^n=z^n k_{v_1}^j v_1+z^n k_{v_2}^j v_2 \tag{6-31}$$

式中 u_1,u_2,v_1 和 v_2 须由边界条件和耦合条件确定。

引理 6.1　设差分格式(6-30)满足冯・牛曼(von Neumann)条件即 Cauchy 稳定，则特征方程的根具有如下性质：

(1) 如果 $|z|>1$，则有：$|k_{u_1}|<1,|k_{u_2}|>1;|k_{v_1}|<1,|k_{v_2}|>1$；

(2) 如果格式具有 Kreiss 耗散，则对 $|z|=1,z\neq 1$，有：$|k_{u_1}|<1,|k_{u_2}|>1,|k_{v_1}|<1,|k_{v_2}|>1$；

(3) 如果 $z=1$，则有：$k_{u_1}=1,|k_{u_2}|>1,k_{v_1}=1,|k_{v_2}|>1$；并且有：$f(1,k_{u_2})=0,g(1,k_{v_1})\neq 0$。

3. 稳定性　分区算子的稳定是由格式(6-4)本身的稳定性、左右边界处理的稳定性和子区交接面处理的稳定性共同决定的。假设格式本身和外边界处理均稳定，因此只考虑交接面的稳定性问题。这时可假设外边界不存在而令 $A,B\to\infty$。

用 GKS[17]稳定性理论来分析耦合条件的稳定性。令：

$$u_j^n=u_0 z^n k_u^j,\quad j\leqslant 0,k_u=k_{u_2};\quad v_j^n=v_0 z^n k_v^j,\quad j\geqslant 0,\quad k_v=k_{v_1} \tag{6-32}$$

将(6-32)代入耦合条件，得到：$\boldsymbol{M}(z,k_u,k_v)(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}=0,\boldsymbol{M}\in\mathbf{C}^{2\times 2}$。

定理 6.2[17]　如果 $\det\boldsymbol{M}(z)\neq 0\ \forall\ |z|\geqslant 1$，则交接面处理是(GKS-)稳定的。

定理 6.3[10]　如果 $\det\boldsymbol{M}(z)\neq 0\ \forall\ |z|\geqslant 1,z\neq 1$ 但 $\det\boldsymbol{M}(1)=0$ 并且有

$$|u_0|<K_u|k_u-1|/|z-1|,\quad |v_0|<K_v|k_v-1|/|z-1|,\quad z\to 1$$

则交接面处理是弱稳定的。式中 K_u,K_v 为正常数。

4. 解的唯一性　这里只讨论定常解的唯一性。这时，$z=1$。根据引理 6.1，基本解的一般形式是 $u_j=u_1+k_{u_2}^j u_2, v_j=v_1+k_{v_2}^j v_2$。将其代入外边界条件的耦合条件，得如下方程：

$$\boldsymbol{Q}(u_1,u_2,v_1,v_2)^{\mathrm{T}}=0,\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{4\times 4}$$

引理 6.2[10]　分区算子的定常解唯一的充要条件是：$\det\boldsymbol{Q}\neq 0$。

定理 6.4[10] 假设外边界处理是 GKS 稳定的，如果内边界处理也是 GKS 稳定的，那么子区算子的定常解是唯一的。

5. 收敛性　这里讨论收敛到定常解的速度，将基本解的一般形式(6-31)代入外边界条件和耦合条件，得方程：$\boldsymbol{P}(z)(u_1,u_2,v_1,v_2)^{\mathrm{T}}=0,\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{4\times4}$。

定理 6.5 如果 $\det\boldsymbol{P}(z)\neq0\ \forall\ |z|\geqslant1$，则当 $n\to\infty$ 时，分区算子的解收敛到定常解。

定理 6.6[18] 设每个子区的网格点足够多而且差分格式具有 Kreiss 耗散。如果交接面处理具有 GKS 稳定性，则当 $n\to\infty$ 时，分区算子的解收敛到定常解。

（二）各种耦合条件的特性

1. 守恒性

设内点方程由守恒格式(6-4)求解。由守恒性定义，可以证明如下结论[4,7,9]：

(1) 对角点对接网格，连续交接的耦合条件(6-5)是守恒的，不连续交接的耦合条件(6-6)对 Lax-Wendroff 格式也是守恒的；

(2) 对中点对接网格，连续交接的耦合条件(6-7)是不守恒的，不连续交接的耦合条件(6-8)是不守恒的；

(3) 对重叠网格，线性插值耦合条件(6-9)是不守恒的，再构造耦合条件(6-10)是不守恒的，通量插值耦合条件(6-11)是守恒的。

对于覆盖网格，文献[9,10]列举的数值结果表明，使用守恒耦合条件时，分区算法能很好的捕获激波，如果采用一般插值等非守恒耦合条件，则激波可能被卡在内边界上，从而严重偏离其精确位置。但数值结果也表明，在某些时候非守恒处理也能给出正确的结果见文献[9,18]，但具体在什么条件下守恒处理不重要还有待研究，文献[7]以绕 NACA0012 机翼的计算给出了这样一个例子，用中点对接网格和不守恒的耦合条件，结果引起升力系数的误差接近 20%。

2. 稳定性

假定内点格式具有 Kreiss 耗散，则有如下结论[7]：

(1) 对角点对接网格，用连续交接的耦合条件(6-5)和不连续交接的耦合条件(6-6)都是稳定的；

(2) 对中点对接网格，用连续交接的耦合条件(6-7)和不连续交接的耦合条件(6-8)都是稳定的；

(3) 对重叠网格，用线性插值耦合条件(6-9)和再构造耦合条件(6-10)是稳定的，而用通量插值耦合条件(6-11)则只是弱稳定的。

(4) 如果内点格式具有 Kreiss 耗散，则具有正系数的一般插值和重构造插值(低阶插值)是 GKS 稳定的，如果系数为负(如高阶插值)，则增加覆盖长度可以保证稳定。

(5) 如果内点格式对于短波为非耗散格式，则用覆盖分区算法不稳定，见文献[10]。

(6) 当格式是隐式并用时间步 n 的值定义时刻 $n+1$ 的耦合条件时，稳定性条件基本不变[7]。

3. 解的唯一性

只考虑定常解的唯一性。假定内点格具有 Kreiss 耗散，很容易证明下面的结论[10]：

(1) 对于角点对接网格，用连续交接的耦合条件(6-5)和不连续交接的耦合条件(6-6)时解是唯一的；

(2) 对于中点对接网格，用连续交接的耦合条件(6-7)和不连续交接的耦合条件(6-8)时解是唯一的；

(3) 对于重迭网格，用线性插值耦合条件(6-9)和再构造耦合条件(6-10)时解是唯一的，而用

通量插值耦合条件(6-11)时解是不唯一的。

当解不唯一时,不同的初始条件和不同的时间积分方式给出的解都不一样。为了在使用通量插值时能得到正确的定常解,应使初始条件连续、在格式中用均匀时间步长、在耦合条件中避免用时间滞后。

以上考虑的是线性不唯一问题。如果有激波,则还有激波穿透失败引起的不唯一。定常激波是由非定常激波过渡而来的。由于初始条件选择的任意性,非定常激波可能在覆盖区的左侧、右侧或中间形成。如果因处理不守恒使激波无法穿越,则无论精确激波位置如何,数值定常激波都可能不确定的处于覆盖区左侧、右侧或中间,但具体在什么条件下激波能顺利穿透还有待研究。

4. 收敛性

为了得到定性的和定量的结果,考虑如下简化问题。解析系统为标量方程 $u_t+u_x=0$, $-1<x<1$。网格大小连续,即 $h_u=h_v$。在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处分别给狄利克来条件和一阶外插条件。重叠区域满足 $a=b=\frac{1}{2}ph=\frac{1}{2}qh$。定义重叠长度 $L_o=\frac{p+q}{2}=p=q$。用耦合条件 $u_0^{n+1}=v_p^n$, $v_o^{n+1}=u_{-q}^n$。设单区算法和重叠分区算法网各点数分别为 J_s, J_o,则有:$J_o=J_s+L_o$ 和 $J_u=J_v=J_s/2+L_o$。令 $u_j^n=z^n\phi_j^u$, $v_j^n=z^n\phi_j^v$。由差分格式、边界条件和耦合条件得到:$z\boldsymbol{M\Phi}=\boldsymbol{N\Phi}$,这里,$\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{J\times J}$, $\boldsymbol{\Phi}=((\phi_j^u)_{j\in D_u},(\phi_j^v)_{j\in D_v})$。考虑谱点集 $Z=\{z:\det(\boldsymbol{M}z-\boldsymbol{N})=0\}$ 和谱半长 $\rho=\max(|z|)$, $z\in Z$。则收敛到残值 R 所需的时间步 n_R 由式 $n_R^{-1}=\ln\rho/\ln R$ 给出。

假设差分格式具有 Kreiss 耗散,可以证明[18],当重叠长度趋向零时,即 $L_o\to 0$,分区算法的收敛速度大大低于单区算法的收敛速度;当重叠长度足够大时,即 $L_o\to\infty$,分区算法的收敛速度趋向于单区算法的收敛速度。

文献[7]进一步用 Lerat 格式分析重叠长度对收敛速度的定量影响,这种影响是通过研究重叠效率 $\varepsilon_0=1-\frac{J_o\ln\rho_s}{J_s\ln\rho_o}$ 来衡量的。重叠效率把重叠部分因双重计算增加的计算量也考虑进去了,它反映了重叠分区算法相对单区算法所增加或减少的计算量。如果 $\varepsilon_0<0$,分区算法的计算量比单区算法超出 $-\varepsilon_0\times100\%$;如果 $\varepsilon_0>0$,分区算法的计算量比单区算法少 $\varepsilon_0\times100\%$。分析表明,当 $J_o=$ CFL,重叠效率最大甚至在某些极端情况可以为正。这一特殊结论在文献[18]中用各种方法进行了验证和解释,但对于实际问题如欧拉方程的求解,系统的每个特征分量对应的有效 CFL 值不完全一样,这时不可能定义唯一的最优覆盖长度。最优覆盖长度应在各特征分量对应的有效 CFL 值之间。令 r 为系统最小特征值与最大特征值之比的绝对值,考虑到 CFL 总是相对最大特征值定义的,所以最佳覆盖长度应在 rCFL 和 CFL 之间。另外,数值结果还表明,使用通量插值时收敛速度极慢,理由是通量插值问题中性(弱)稳定,收敛速度只是通过非线性方程变系数影响来决定。

5. 高维问题

前面的一维分析结论对高维问题具有明确的指导意义,但高维应用中有几个新问题需要注意:

(1) 守恒性问题　如果用覆盖网格和通量插值,则需特别注意插值方式,否则根本不守恒[4,15]。

(2) 稳定性问题　在对接网格中用到通量插值时,如果在与内边界平行的方向一侧子区相对另一侧子区有网格加密,应在细网格上构造通量并投影到粗网格上,避免在粗网格上构造通量而投影到细网格上。

(3) 收敛性问题　如果使用覆盖网格的 ADI 隐式格式,则滞后耦合条件对收敛速度影响很小。

第二节　并行算法

有关并行计算的问题有专门的书进行论述[19,20,21]。也有一些综述性文章[22,23]。这里介绍有关并行机器与并行计算的一些重要概念。

一、并行计算机结构

（一）Flynn 分类法

多年以来 Flynn 分类法被用于高性能计算机的分类。这种分类法基于指令流和数据流的处理方式(单个或多个指令/数据流)。它将计算机分成三个主要类别[24]。

SISD(单指令单数据流)系统。它是包含一个 CPU 的常用系统，如工作站和计算服务器，因此能以串行模式处理一个指令流。现在许多大的计算服务器具有不止一个 CPU，但它们最常用于执行无关作业(指令流)。因此，这种系统应该作为一组 SISD 机器看待。

SIMD(单指令多数据流)系统。这种系统具有许多(简单的)处理元件，数目从 1024 至 64k。它们都可以在封闭步骤里对不同数据执行同一指令。由此单个指令并行地操作多个数据项目。过去，SIMD 机器如 Thinking Machines 和 CM-2 和 MasPar 已经相当成功。如今，除了还存在于某些受高结构化和高交换量数据支配的特殊应用领域如图像处理的系统外，SIMD 结构几乎消失了。

MIMD(多指令多数据流)系统。在'多指令、多数据流'系统中，各处理器对各自的数据独立地执行不同的指令流，所设计的硬件和软件能使各处理器高效地配合。当由不同处理器执行的任务共同形成一个作业时，就发生了并行处理。

向量处理器经常被认为是 SIMD 系统的子系统。向量处理器具有特殊硬件('向量元件')以流水线方式来完成对含有相似数据的数组的运算。这些向量元件能够以每次时间循环一次、两次和在特殊情况下三次的速率输送结果。在编程者看来，向量处理器在执行向量模式时，以几乎并行的方式(SIMD 方式)来操作它们的数据。向量处理器用于 Cray C90，J916 和 T90 系列，Convex C-系列，Fujitsu VP-系列，NEC SX-系列，等。

浮点运算的流水线操作在用于高性能工作站的 RISC(Reduced Instruction Set Computer)处理器中也是一个关键概念。一些先进的 RISC 处理器也能并行地执行几个指令(如'二元指令模式')。

（二）MIMD 系统的内存组织形式

并行计算机也能根据其他标准来分类。根据内存组织方式可以进一步划分 MIMD 系统。

1. 内存共享 MIMD 系统

在内存共享 MIMD 系统中所有处理器使用一个公共内存。在内存共享系统中的主要设计问题是处理器与存储器(内存)之间的联结。当增加处理器数量时，存储器联结的总宽度在理想情况应随处理器数目 P 线性增加。不幸的是，完全相互联结代价很高，需 $O(P^2)$ 个联结。于是，人们采用不同的联结网络。在当今所有的多处理器向量机器中都使用交叉杆(cross-bar)结构。由于容量限制或网络时耗，内存共享系统使处理器还达不到很大的数目。

内存共享概念已经在多处理器向量机器中使用了一段时间(Cray X-MP，IBM 3090，等)。然而这些系统不被经常用作真正的并行系统：大部分作业只用一个处理器。其中一个原因是处理器的有限数目(经常为 4 个或 8 个)，这限制了可能的并行加速比。而且，由于时间共享，正常情况下用户在一个指定时刻下不能完全控制分配给他工作的处理器数目。这也会限制所能得到的加速倍数。

一些计算机公司(Convex，Silicon Graphics，…)提供基于RISC处理器的内存共享MIMD系统，处理器数目多达20个。

2. 内存分布MIMD系统

一台内存分布式MIMD并行计算机由一些处理器组成。每个处理器都有自己的局部内存，由通讯网络来相互联结。每个处理器和它的局部内存合称处理节点。每个处理节点实际上就是一个完整的计算机，运行时独立于其它节点。处理节点只能通过通讯网络传递信息来进行数据交换。

对于内存分布机器，通讯网络结构也是极其重要的。理想情况下，人们想要一个全联结系统，由此每个节点可直接联结于其他每个节点。但是当节点数目大时这是不可能的。因此节点的布置以联结网络的某种拓扑结构来安排。联结方式的选择范围受数据交换时耗制约。

在现今的并行系统中，网络拓扑结构和通讯直径不太重要，因为这些系统使用某种信息'小通道'。这意味着当两个节点间通讯路径一建立，数据就通过这条路径输送而不用妨碍中间节点的操作。除了建立节点间通道的一小部分时耗外，数据交换时耗已完全与节点间距离无关了。

一些系统对网络使用二维或三维网格(mesh)结构。它的基本原因是这种相互联结的拓扑结构对大部分用于大规模科学计算的算法已经足够了，而使用更高级的联结网络很难获得补偿。在另一些系统中使用一种多级网络。多级网络具有对半带宽度与处理器数目成线性关系而同时保持每个处理器联结数目固定的优点。内存分布式系统的对半带宽度定义为联结系统的一半(P/2个处理器)与另一半的所有联结的有效带宽。

内存分布系统的一个重要优点是这种设计比共享系统更少受到数目问题的干扰。网络(在限定带宽时)只在节点间有数据交换时才被用上，而不是被每个内存通道所用。缺点是网络上数据交换的时耗大大高于内存共享系统中使用共享数据所需的时耗。当问题的特征决定了处理器间需进行频繁的数据交换时，也许只能达到峰值速度的一小部分。

第一代内存分布式DM-MIMD系统是基于简单，便宜的微处理器。因此，即使相互联结的处理器数目有100至1000个，这些机器的峰值性能也低于典型的向量处理器和内存共享超级并行计算机的性能。如今，内存分布式并行计算机的性能经常超过传统的超级计算机。这是因为内存分布式系统所用的RISC处理器性能的快速提高和网络技术的改进。此外，许多系统现在装有允许快速并行读写存盘的高级硬件和软件(即'并行存盘系统')。因此，内存分布并行系统在侧重于计算速度的领域如计算流体力学中很快占有重要地位。

内存分布式机器有Intel Paragon，CM-5，Cray T3D，IBM SP2。内存分布系统处理数目可达上千个，但通常在16至128之间。

一些年来，网络或工作站群被当作'廉价'的内存分布式并行计算机来使用。一个工作站群允许开发新的计算性能。当然，如果工作站通过以太网(Ethernet)或甚至通过快速FDDI简单联在一起，能够像并行系统那样有效使用的工作站数目就受到限制，这是因为这类联结使数据交换性能较低。一些工作站公司提供相互联结开关来达到高速数据交换(如Digital)。这种群体工作方式填补了与'真正的并行计算机'的差距。

由此现今被用作并行计算机的系统很广泛，它包含从小工作站群到由许多处理器和高级通讯网络技术组成的大系统。

3. 混合内存系统

尽管内存共享和分布式系统似乎有明显的区别，但许多并行系统使用一种混合型内存管理。在内存共享系统中，每个处理器可能有一个大型超高速缓冲存储器，可以看作一个局部内存。一些系统有两级组织：(1) 处理器以内存共享模式组织，(2) 各处理器通过通讯网络来相互联结。最后，内

存分布式系统可以包含取得其他处理器内存中的数据的软硬件支持，并使之对用户透明化。根据这种支持的具体形式，这被称为'虚内存共享'，'总内存共享'，'总体虚内存'，等。

4. 内存等级和性能

在向量处理器和高级 RISC 处理器中，处理器运算速度都比主存储器上的数据读写快得多。向量处理器中的向量寄存器和 RISC 处理器中的缓冲器置于处理器与主存储器之间。这些速度非常高的内存方式能维持处理器作计算而不需要频繁地从主存储器中接受指令。

向量寄存器，超高速缓冲存储器，局部存储器和/或总的共享内存一起形成内存等级。对一个给定的应用程序来说，它能达到的性能决定性地依赖于内存等级的'更高级'存储数据的（再）利用。因此，为了取得高性能，算法就必须显示数据通道的位置，包括（地址）空间和时间两方面。

（三）几种并行系统

1. Intel Paragon

Intel Paragon 是一种内存分布式系统，它的处理节点以二维网格相互联结。一个有 1874 个处理器的 Paragon 系统在 Sandia 国家实验室运行。有两种处理节点可以使用，都是基于 Intel i860 处理器。一般性任务的节点有两个处理器（一个用于计算，一个用于数据交换）和一个读写扩充口。多处理器节点有两个计算处理器（带共享内存）和一个数据交换处理器。通过网络传送的小通道信息，是由每个节点一个的网络路径生成条来完成的。处理节点逻辑上分为计算部分（并行程序执行），I/O 部分（用于 I/O 和网络存盘的节点）和服务部分（人机对话，编译）。

分布式操作系统能使系统操作简单（单过程 ID 空间，单个文件系统，等）和对作业进行自动安排。Intel 的 NX 数据交换系统或 SUNMOS 环境（Sandia）支持内存分布编程方式。并行发展环境包括软件发展和性能监控的不同工具[25]。

2. Cray T3D

Cray T3D 是有 32 至 2048 个处理节点的内存分布并行系统。处理节点（DEC Alpha 处理器）是由一个双向三维环形圆纹（周期网格）网络联结（网络的每个开关由两个节点共享）。人们采用不同技巧来降低联结网络的数据交换时耗和进行处理节点的同步控制。从构造上看内存是分布的，但总体上它是可寻址的。因此，它支持三种编程方式：SIMD（数据并行），内存共享 MIMD 和内存分布式 MIMD 编程方式。软件环境包括一个具有 Fortran 90 特征（数组句法等）的 Fortran 编译器，允许用户在一个程序中混和使用三种编程方式。还包括 PVM，一个性能分析器等。T3D 系统需要一个 Cray 向量处理器作为主系统。

3. IBM SP2

IBM SP2 是具有 128 个处理节点的内存分布系统。有两类处理节点：'窄节点'和'宽节点'，都是基于 POWER2 处理器。宽节点允许有更大的内存，提供更快的处理器与内存之间的交换和允许附上不同的存储器。节点由'高性能开关'相互联结。开关是一个进行小通道运送的多步 Ω-网络。开关的可用数据交换带宽度与处理器数目成线性关系。提供对低延迟和最小信息时耗的短信息支持。更多的信息见[26]。AIX 并行环境包括信息传送库（MPL），性能监控和形象化工具。PVM 的优化版本也有了。只支持内存分布编程方式，作业安排支持由'负荷测试'软件提供。

4. Silicon Graphic Power Challenge（SGPC）[27]

SGPC 系统是内存共享多处理器，最多具有 18 个处理器（MIPS R8000），带有能同时运行的多功能部件。每个处理器有一个缓冲器等级，有一个小的快速的分片缓冲器和一个大的较慢的但用管道输送的不分片缓冲器。主存储器能容纳多达 8 个方向的数据插入。

Fortran 和 C 编译器能够重组程序，在嵌套循环情况下通过互换循环，'重迭'或'分块'来减少

缓冲器的失误(循环分块是优化内存等级性能的一种技术，如用于矩阵运行)。另外，编译器支持Fortran和C程序自动的或通过用户设定(通过指令)的并行控制。

(开关)通讯网络能联结多达八个Power Challenge系统，形成一个'CHALLENGE列'系统。通过这个网络的数据交换必须以内存分布形式编程，使用信息运送库(PVM，MPI)或高性能Fortran。

5. Convex Exemplar

Convex Exemplar由一些超节点组成，通过一个具有四个插入联结点的低延迟环形网络来相互联结。每个超节点是一个内存共享多处理器，含8个处理器(HP PA-RISC 7200)。由一个交叉棒结构联至4个内存单元。

Exemplar编程环境对内存共享式和分布式都提供支持。PVM数据交换库用于信息传送。内存共享编程环境是通过所谓'总体共享的分布式内存'实现的。以内存共享模拟编写的一个应用程序能使用位于不同超节点的处理器。在那种情况下，用到了内存等级中的三级：特殊处理器的大缓冲器，处理器所属的超节点的总内存和位于不同超节点的内存。

摄取位于不同超节点的数据所需时间比摄取同一个超节点内的数据所花的时间要长。为了减少由于使用环网络引起的延迟，每个超节点包括一个由网络制成内存参考的缓冲器。该缓冲器保存的信息能用于指出任何现时在超节点被缓冲的总数据位置，系统自动保持多个超节点间缓冲的一致性。

二、并行计算机编程

我们已经指出在内存共享和内存分布并行设计中并没有明显的区别。并且，最后一些并行系统采用了混合型内存机制。然而，我们可以明显地区别两种不同的编程方式，内存共享式编程和内存分布式编程。

在两种模式中，程序在运行时分裂成一些子过程并行处理。大部分情况下，一个处理器只能处理一个子过程，但我们将在下面情形下用'处理器'这个词，用以代替常常更为精确的'子过程'。

(一) 内存共享编程模式

不论内存的物理组织形式如何，内存共享编程方式基于公共区或总地址空间的存在，即每个处理器能通往每个内存地址。因此，处理器之间的交换通过接近(写或读)共享数据来实现。接触共享数据的时间可能很不一致，这依赖于共享数据的物理位置(缓冲器，局部存储器，另一个处理器的存储器)。

也有可能出现这样的情况，不同处理器要同时使用公共内存的一部分。在此情况下，有必要进行处理器的同步控制。在执行一个程序的串行部分之前也需要同步控制，以确定所有的处理器在串行之前已完成它们的并行操作。

这样，可能由于'内存冲突'，同步控制和'串行瓶颈'使性能本质地恶化。另外，(并行)任务的生成导致的额外时耗会变得很高。

目前，在内存共享编程方式中有能自动实现并行的Fortran和C编译器。程序员也可以通过命令影响并行控制(如同对向量处理器那样)。并行控制可以针对循环，也可以针对任务(子程序)，前者也称'细'或'微观'并行控制，后者称'粗'或'宏观'并行控制。

(二) 内存分布编程方式

在内存分布式编程或信息传递方式中，处理器只能接触自己的内存。无论何时，一个处理器需要另一个处理节点中的数据时，数据必须在处理节点间传送。这样一个信息传递或数据交换步骤包

括发送节点的信息准备，通过通讯网络的输送和目标节点的信息接收。当信息传递方式是用于内存共享系统中时，输送实际上被共享内存的信息存储所代替。

另外，在内存分布模式中也有同步控制问题。可能一个处理器中还没有另一个处理器所需要的数据；在此同步点后面的处理器必须等前一个处理器赶上来。为确保处理器间的交流正确进行也需要同步控制。

尽管每个处理器能运行一个不同程序，但最常用的是'单程序，多数据'(SPMD)形式：所有处理器执行同一程序对应于一套数据的不同部分，这就需要对数据和对其进行的操作的占用进行分配。数据分配必须使得处理器间工作负载很好地平衡，并且使数据交换和同步控制量最小。

内存分布式编程经常比内存共享式编程难。程序员必须知道在局部内存中的数据位置，并且，当需要时，直接地移动或分配这些数据。有关数据分配和所有必要的数据交换的指令不得不被显式地写在程序中。一个串行程序常常需要做重大改造才能使之并行。

内存分布式程序用常规语言(Fortran，C，C++，…)写成，用一个数据交换库来进行数据交换和同步操作。基本数据交换指令允许信息在任意处理节点间发送和接收。送来的信息通常在目标节点由操作系统缓冲，直到应用程序需要这条信息。也有不同的'高水平'指令，如对分布于节点间的一套数据作总体运算(求和和求最大值)和同步控制。

除依赖于机器的数据交换库外，还发展了一些独立于机器的数据交换库。广泛应用的系统是PVM[28]，MPI[29]和PARMACS[30]。这些库或环境中有的(如PARMACS)含有能自动分裂和合并向量和矩阵以及对性能进行跟踪和分析的指令。PVM环境用非均匀网络把工作站联起来作并行机器使用，如同内存分布式并行计算机那样。

对DM-MIMD机器进行(半)自动并行的编译器和软件工具现在已经存在了。对并行应用来说，高性能Fortran(HPF)是Fortran 90用于编写并行应用软件的扩展[31]。HPF包括的特征有，安排多维数组(即结构数据块)至并行处理器和指定数据并行操作。目前正在扩展HPF使得对更复杂的数据结构如分区网格具有类似功能[32]。

FORGE 90是一个软件工具，用于对已有的串行程序进行分析和(半)自动并行化：基于用户定义的数组分配，FORGE允许对循环的并行进行人机对话或自动控制[33]。

三、并行性能参数

并行操作的质量经常由得到的加速比或效率来衡量。

一种并行算法在P个处理器上运行所得的并行加速比由这个并行算法在单个处理器上运行时间与在P个处理器上运行时间之比来定义。并行效率等于加速比除以P。由此我们得到如下并行加速比S(n,P)和并行效率E(n,P)的定义，

$$S(n,P)=\frac{T(n,1)}{T(n,P)},\quad E(n,P)=\frac{S(n,P)}{P}=\frac{T(n,1)}{PT(n,P)} \tag{6-33}$$

n表示问题的尺度，$T(n,1)$和$T(n,P)$指算法分别在一个和P个处理器上的运行时间。

注意式(6-33)没有给出任何有关并行算法质量的信息。它只衡量一个算法被并行操作的好坏程度。因此，还得补充衡量并行算法数值效率的信息。该数值效率可以定义成单个处理器运行的时间的以下比率：$T_{best}(n)/T(n,1)$。此处，$T_{best}(n)$指由并行计算机的一个处理器运行已知速度最快的串行算法所需时间。并行加速比(或效率)结合数值效率导致了绝对加速比和绝对效率的概念，定义如下，

$$\bar{S}(n,P)=\frac{T_{best}(n)}{T(n,P)},\quad \bar{E}(n,P)=\frac{\bar{S}(n,P)}{P}=\frac{T_{best}(n)}{PT(n,P)} \tag{6-34}$$

实际考虑限制了定义(6-34)的使用。首先是难以确定哪个算法是最好的串行算法;这可能依赖于问题尺度n,指定使用的硬件,程序编写方式等。另外当可以得到更好的算法时,'最好'的算法这个概念便随时改变。而且,也不总是能良好地实现那个算法。

设想一个有P个处理器的机器运行不能超过一个单处理器机器的P倍,即有$S(n,P)\leqslant P$和$E(n,P)\leqslant 100\%$。现在列举一些可能引起偏离线性加速比关系的时耗。

1. 串行部分

一台并行计算机取得的加速比可能因存在一小部分固有的串行部分而被大大的限制。Amdahl定律表述了这个问题[34]:令α为在计算中必须串行操作的部分,$0\leqslant\alpha\leqslant 1$。一台有$P$个处理器的并行计算机所能得到的最大加速比如下,

$$S(n,P)\leqslant\frac{1}{\alpha+(1-\alpha)/P}\leqslant\frac{1}{\alpha} \tag{6-35}$$

例如,当10%的程序必须按串行模式运行时,最大加速倍数被限制在10以内,而与有效处理器数目无关。

Amdahl定律成为人们怀疑大规模并行系统可用性的中心论题。他们的批评在只考虑解一定尺度的指定问题(即α为常值)时是有道理的。但实际上,很少有这种情况,因为问题的尺度往往与处理器数目和计算机的性能成比例。对于许多计算问题,当问题增大时,串行部分α很快趋于0。因此,当问题足够大时,α依赖于处理器数目,(6-35)的重要性减弱了。Gustafson等人用另一法则代替了Amdahl定律[35,36],令$\bar{\alpha}$等于一个有P个处理器的并行系统在计算期间内的串行部分。能得到的最大加速比如下,

$$S'(n,P)\leqslant P(1-\bar{\alpha})+\bar{\alpha} \tag{6-36}$$

$S'(n,P)$通常叫做比例加速比。它等于$T'(n,1)$对$T'(n,P)$的比率,$T'(n,1)$是并行程序在单个处理器上要运行的时间,如果这个处理器有足够的有效资源(内存)。在大规模应用中,$\bar{\alpha}$值经常很小,并且在大规模处理器上得到非常高的比例加速比。

2. 非最佳算法和算法时耗

最好的串行算法经常很难或不可能并行化(如解三对角线性系统的托马斯算法)。在那种情况下并行算法可能比串行算法需要更大的计算量。另外,为了避免数据交换所带来的时耗,人们可能希望在不同处理器上重复一些计算,而不是让一个处理器计算后分配结果(如'双通量计算',见后)。

3. 软件时耗

并行控制经常引起(有关的)软件时耗增加,如索引,程序调用等的时耗。这种方法也常引起循环变短,因而限制了向量长度。这削减了向量计算的使用潜力。

4. 负载不平衡

并行算法的运行时间由负担最多的处理器的运行时间决定。当计算负载不是均匀分布时,就会引起负载不平衡,并且发生处理器空转:处理器必须等待别的处理器完成指定计算。

5. 数据交换和同步控制时耗

最后,任何用于数据交换和同步控制的时间是纯时耗。往后将详细讨论这些不同来源的时耗。

四、网格分区并行处理

(一) 引 言

采用网格分区特别适合计算流体动力学的并行处理,这里将注意力集中在内存分布式并行上。

这有两个原因。第一，并行系统中只有内存分布系统有‘最高’并行结构。第二，在内存分布编程方式中，并行控制语句必须在应用程序中明确给出。为内存分布系统设计的算法也能在内存共享(或混合)系统中很好地运行。数据分配对内存分布系统是必要的，对内存共享系统也是有益的。例如，矩阵通常不能全部存入缓冲器中。通过将矩阵运算分解成对子矩阵的运算，并选择适应缓冲器操作的子矩阵大小，就可以优化内存等级的性能。

每个网格点上的计算一般只涉及几何相邻的网格点，因而使并行变得很容易。通过将网格分裂成子区(子网格)和分配这些子区到并行系统的处理器，就能达到并行计算的目的。每个处理器对分配给它的(单个或几个)子区进行有关计算。子区之间的联系和数据交换仅与相邻子域之间的内边界有关。

在带网格问题的并行计算及并行算法的性能分析中所涉及到的许多重要概念可以通过研究‘模型问题’的并行计算来理解网格分区的并行算法和计算性能分析中的许多重要概念。例如，假定一个二维结构网格分裂成几个大小相等的子区，于是每个处理器处理 $n_x \times n_y$ 个网格点或单元。再假定显式时间积分基于五点格式，即

$$u_{i,j}^{(k+1)} = f(u_{i-1,j}^{(k)}, u_{i+1,j}^{(k)}, u_{i,j-1}^{(k)}, u_{i,j+1}^{(k)})$$

每个处理器能够独立计算本子域的所有网格点。为了计算子区边界上网格点上的值，处理器必须还知道相邻子域与本子域边界匹配的网格点的函数值 $u_{i,j}^{(k)}$。这个数值必须从相邻处理器中取得并存储在重叠区中。边界网格点上的值必须送到相邻区域中去。因此在每步积分之前，相邻的处理器必须互相交换信息。下面将讨论几个并行计算的一些重要概念。

(二) 数据交换时耗分析

对上述简单模型问题，若问题尺度为 n，算法在一个有 P 个处理器的并行系统上的运行时间为

$$T(n,P) = T_{calc} + T_{comm}$$

T_{calc} 指计算时间，T_{comm} 指数据交换时间。假定除重叠区的数据交换外没有其他时耗，串行运行模式所用的计算时间是

$$T(n,1) = P \cdot T_{calc}$$

因而加速比和并行效率由下式给出：

$$S(n,P) = \frac{PT_{calc}}{T_{calc} + T_{comm}} = \frac{P}{1 + \dfrac{T_{comm}}{T_{calc}}} = \frac{P}{1 + f_c}$$

$$E(n,P) = \frac{1}{1 + \dfrac{T_{comm}}{T_{calc}}} = \frac{1}{1 + f_c}$$

这里 $f_c = T_{comm}/T_{calc}$ 为数据交换时耗与计算时耗的比值(时耗比)。如果 f_c 很小，可得近于理想的加速比($S(n,P) \simeq P$)和效率($E(n,P) \simeq 1$)。每个处理器发送和接收数据的数量与边界单元数成比例，而每个处理器所作的计算量则与内单元数成比例。对于模型问题，我们有

$$T_{calc} = c_1 n_x n_y t_{calc}$$

$$T_{comm} = c_2 \cdot 2(n_x + n_y) t_{comm}$$

式中 t_{calc} 代表每个网格点浮点运算所需时间，t_{comm} 指数据交换一个浮点数所需时间，c_1, c_2 为常数。由此得到一个重要公式

$$f_c = \frac{c_2}{c_1} \frac{2(n_x + n_y)}{n_x \times n_y} \frac{t_{comm}}{t_{calc}} \tag{6-37}$$

从这个公式可以看出，时耗比依赖于 3 个因素：

1. 几何特征 $2(n_x+n_y)/n_xn_y$：衡量'周界线对表面积'的比率，比率越小 f_c 的值越小；

2. 机器特性 t_{comm}/t_{calc}：衡量数据交换速度相对浮点运算速度的快慢程度；

3. 算法特征 c_2/c_1：浮点运算量很大（c_1 大）而数据交换运算量小（c_2 小），将使时耗比 f_c 小。

通过进一步分析，可以得出下面的指导性原则：

1. 避免发放短信息　大部分数据交换系统有个重要特性，它们具有相当高的信息启动时间。相邻处理器间的一条信息发送时耗可写成

$$T(n) = t_{startup} + nt_{send}$$

这里 n 指信息长度（传递的字数），$t_{startup}$是信息启动时间（由软硬件延迟引起），t_{send}是每个字的传送时间。许多系统的 $t_{startup}$大大超过 t_{send}（甚至 1000 倍）。不难马上得出这样的结论：应尽可能避免发送许多短信息。在式(6-37)中 t_{comm}指交换一个字的平均时间。因此它将取决于发送信息的平均长度：对短信息有 $t_{comm}\approx t_{startup}$，而对非常长的信息有 $t_{comm}\approx t_{send}$。当用(6-37)分析并行算法时必须考虑到这一点。

2. 不同网格分裂方法　对模型问题，数据交换量与子区内边界的网格点数成比例，即与子区'周界线'长度成比例。当子区大小一定，如果每个方向网格点数相等，即 $n_x=n_y$，则周界线长度（因而数据交换量）最小，相应的子区称'正方形子区'。因此，分裂成正方形子区能得到最小数据交换量。由此可见，条状（或一维）分裂使子区产生长边界，但最多与两个子区相邻。块状（或二维）分裂给子区以更短的边界，但多达 4 个相邻子区。因而块状分裂使总数据交换量最小，而条状分裂使发送信息次数最少。什么是最好的选择依赖于问题和并行计算机的特性。当信息启动时间决定每条信息数据交换时间时，条状分裂是有利的。注意到所有方向所需数据交换不总是等量的，但它们可能依赖于问题特性或数值算法。这些都会影响区域分裂方式的选择。例如，考虑绕机翼流动的可压 N-S 方程的求解。使用代数湍流模型会导致对垂直于机翼的那个方向的依赖（和数据交换），因而适合使用条状分裂。

3. 对子区大小的依赖　当每个子区包括 $N=n_x\times n_y$ 个网格点，并且块状分裂用正方形子区($n_x=n_y$)时，由方程(6-37)得

$$f_c \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{6-38}$$

这表明只要子区大小一定，数据交换时耗比 f_c 便保持恒定，而与处理器数目无关，当然这暗示着当处理器数目 P 增大时，为了保持并行效率不变，总问题尺度 M 也增大，这时因为 $M=N\times P$。关系式 $f_c\propto\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{M}}$ 也指明，对给定的（总）问题尺度 M，效率和加速比随处理器数目增加而降低（参见 Amdahl 定律）。这个分析只在当数据交换只是相邻区域的信息数据交换时有效。任何总体数据交换（如，将局部残值加起来计算总残值）暗示着一个随着处理器数目增加而增长的时耗比。然而，这种总体数据交换的相对重要性经常很低，不真正影响总加速比和效率。

4. 扩展至多点格式和三维网格　上述分析在用其他计算格式代替五点格式时仍有效[19]。这可能有必要用更大的重叠区（如用 2 点宽度）。在那种情况下信息交换量（和常数 c_2）增加，但每个网格单元上的运算数量（和常数 c_1）也增加。因此，数据交换时耗比不一定提高。在三维网格情况下，可使用一维，二维和三维分裂。于是，交换量由子区'表面积对体积'比率决定，方程(6-38)中的分母相应改为 $N^{1/3}$，见[19]。

5. 对机器特性的依赖　一个给定算法的加速比和并行效率与机器特性 t_{comm}/t_{calc}成比例。现有的不同并行系统所具有的这个特性值很不相同。因而，不同机器的数据交换时耗比根本不同。注意

计算机生产厂家也许对他们的处理器和通讯网络交替升级。处理器升级而不同时提高数据交换速度，会产生很大比率 t_{comm}/t_{calc} 的不平衡系统。

6. 对问题特性的依赖　计算流体力学应用的特性是，在每次迭代中每个网格点或网格单元上有很多浮点运算，而每个点上只定义少量的（需进行交换的）变量。所以在数据交换时耗比中的因子 $\frac{c_2}{c_1}$ 将很小。结果是，使数据交换时耗比达到最小不总是非常影响加速比和并行效率。然而，使负载不平衡减到最小总是重要的。下面的研究表明块状分裂一般也使负载不平衡最小。因此在许多情况下数据交换时耗比最小和负载不平衡最小是相辅相成的。

（三）负载不平衡分析

令第 i 个处理器的计算时间为 $T_i^{calc}, i=1\cdots P$，并且令 $T_{average}^{calc}$ 和 T_{max}^{calc} 分别为 P 个处理器上的平均和最大计算时间。我们定义负载平衡因子为

$$\lambda(n,p)=\frac{T_{average}^{calc}}{T_{max}^{calc}}$$

如果运算数量（按先后顺序计算）不依赖于处理器的数目，并且数据交换时间和处理器空转时间可以忽略，则负载平衡因子是并行效率的很好估计。事实上在这种情况下并行效率由下式给出：

$$E(n,p)=\frac{T(n,1)}{PT(n,P)}\approx\frac{\sum_{i=1}^{P}T_i^{calc}}{P_{max}(T_i^{calc})}=\frac{T_i^{calc}}{T_{max}^{calc}}$$

从而有 $E(n,p)\approx\lambda(n,p)$。

注意最容易犯的错误是，用子区的最大计算时间和最小计算时间的比来测量负载（不）平衡。

在很多应用中，依据迭代过程的每一次迭代后因更新重叠区的数据所需要的数据交换来保持处理器之间的一致。在这种情况下，我们可以通过分析一个迭代步来确定加速比和并行效率。假定每个网格点上的运算量为常数，并且数据交换时间以忽略，则有：

$$E(n,p)=\frac{T(n,1)}{PT(n,P)}\approx\frac{M}{PN_{max}}=\frac{N_{average}}{N_{max}}$$

这里 M 为总的网格点数量，N_{max} 为一个子区的最大网格点数，$N_{average}=M/P$。

假定一个矩形网格在 P 个处理器中分配。如果网格不能在处理器中相等地分配，块状分裂将引起比条状分裂更大的负载平衡因子。分裂成正方形子区将导致最大的负载平衡因子，即最小的负载不平衡。

（外）边界条件处理也是负载不平衡的可能来源。实际上，对一般边界单元作的计算与内单元的不同。为了使边界条件处理引起的负载不平衡最小，边界单元必须尽可能相等地分配到处理器中。这在子区（近似）为正方形时能达到。

每个网格点或网格单元的计算量为常值这个假设在 CFD 中不总是有效的。例如，位于亚声速区和超声速区的网格单元上的计算量就不同。这会导致不能提前准确预知的负载不平衡。当在区域的不同部分的数学模型不同时，会产生相似问题，如考虑到高温区的化学反应。

（四）并行算法的数值效率

到现在，我们通过比较并行运算时间与相同算法在一个处理器上所需时间，讨论了并行时耗如何影响计算性能。

在许多情况下用于并行机器的算法不同于用于串行机器的典型算法。为了得到可接受的并行效率，常对串行算法作修改，以减少数据交换或同步点数量。这可能使算法的数值效率恶化。当串行算法不能简单和有效地并行化时，甚至有必要使用具有不同数值特性（不同运算数量，不同收敛

性,…)的完全不同的算法。

1. 显式格式　如果执行了所有必要的数据交换,则显式格式是固有并行的而且并行(网格分裂)不影响数值特性。例如,Runge-Kutta 法每一分步后需要进行数据交换。为了减少数据交换时耗,可以只在完全时间积分步后对重叠区更新数据。省略一些数据交换会得到稍微差些的收敛性,但能导致更高的总加速比。这种技术导致了结构分块方法,但这里分块的数目是由处理器数目决定的,而不是由区域的几何特性决定。

2. 隐式格式　当使用隐式方法时情况更复杂。

(1) 假定用点松弛格式解生成的线性系统。雅可比松弛是固有并行的。在这种情况下数据交换需要与上面的模型问题(重叠区数据交换)完全一样。高斯-赛得尔松弛通常有更好的收敛性。在串行计算机上,典型的高斯-赛得尔迭代按指定顺序扫过网格单元。在向量或并行计算机上网格点需按红-黑交替顺序排列。先对所有'红'点并行运算,然后计算'黑'点。自然(字典式)顺序的高斯-赛得尔法和红-黑顺序的高斯-赛得尔法在收敛速度上是完全不同的。下一节将举例说明。

(2) 当使用列松弛时,必须求解(分块)三对角系统。这样便有同一网格线上网格点之间的相互依赖。如果只对一个方向扫描,那么三对角系统(以及相应的数据依赖)只定义在这个方向上。通过使用条状分裂,则可保证每个三对角系统只属于一个处理器。于是每个系统仍可用最佳串行算法托马斯算法(即高斯消去法)求解。如果使用块状分裂,或者对不同方向使用列松弛,则线松弛的并行化处理不会如此容易。于是(部分)三对角系统被分布于处理节点之间。基于子结构化的高斯消去法和/或循环约简,已经发展了对(分块)三对角系统的并行解法[37,11]。然而,这些解法的运算量比托马斯算法的量高约 2 倍从而它们的数值效率很低,并且它们也包含串行部分。因为必须解许多三对角系统,后者的缺陷可以通过平均分配串行部分于各处理器中来避免(以一些数据交换为代价)。人们试图通过构造近似解法来减少并行算法的计算时间[38,39]。

在求解大量三对角系统的一种替代方法中,以流水线方式使用托马斯算法。因为这些并行三对角系统解法与托马斯算法相比有低'数值效率',以数据交换为代价,也许值得用托马斯算法。然而这种方法导致许多短信息交换和(流水线过程的开始和结束时的)负载不平衡。另一种替代方法是用如下的方式求解双向三对角系统。我们知道如果对数据采用条状分裂,则对其中的一个方向三对角系统可用托马斯算法求解。如果人们将不同的条状分裂用于算法的两个阶段,使得在每一阶段任一三对角系统只存于一个处理器中,则在两个方向都可用托马斯算法。这要求数据对两个阶段是完全透明的。因两个阶段数据的完全透明化引起的数据交换量与每个处理器含有的网格点数量成比例。因为计算所消耗的时间与上面有同样的性质,所以并行效率还是可以接受的。在具有不规则边界的有限差分网格上实现半隐式 ADI 时间积分,上面的第二个方法以总效率衡量是最有效的[40]。

(3) 数值处理和并行处理相互作用的另一个例子能在多重网格中找到。以达到收敛所需的工作量计算,W-循环通常比 V-循环更有效。然而在并行计算机中,W-循环导致差的并行效率,所以人们常常采用 V-循环,尽管后者数值特性较差[41]。

(4) 解偏微分方程的并行算法也可基于数学意义上的区域分解。有两种可能。

在 Schwartz 区域分裂方法中使用重叠子区。在子区边界用近似解,分别在每个子区上解微分方程。产生的近似解提供了解相邻(重叠)子区边界的新的近似值。必须用迭代法重复这个过程。

在 Schur-complement 方法中,用非重叠子区。子区问题按定义在子区边界上的变量求解。(通过求解交界面问题或'Schur-complement'问题)计算出边界上的变量后,就能确定子区里面的变量。

注意这两种区域分解与不用分解相比，都需要做额外计算。这些额外计算必须看作由并行引起的算法时耗。计算流体力学问题的区域分裂技术在文献[42,43,44,23]中作了描述。

参考文献

[1] Steger J L, Benek J A. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 64: 301 320,1987

[2] Shaw J A, Weatheril N P. Automatic topology generation for multiblock grids. Appl. Math. and Comp., 2:355-388, 1992

[3] Rigby D L. Method of weakest descent for automatic block-merging. Proceeding of Intern. Conf. Numer. Meth. Fl. Dyn., Monterey, June 24-28, 1996

[4] Berger M. On conservation at grid interfaces. SIAM J. Numer. Anal., 24:967-983,1987

[5] Rai M M. A conservative treatment of zonal boundaries for Euler equation calculations. J. Comput. Phys., 62:, 472-503,1986

[6] Rai M M. A implicit, conservative, zonal-boundary scheme for Euler equation calculations. Computers Fluids, 14: 295-319,1986

[7] Lerat A, Wu Z N. Stable conservative multidomain treatments for implicit Euler solvers. J. Comput. Phys., 123: 45-64,1996

[8] Chesshire G, Henshaw D. Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations. J. Comput. Phys., 90: 1-64,1990

[9] Part-Enander E, Sjögreen B. Conservative and non-conservative interpolation between overlapping grids for finite volume solutions of hyperbolic problems. Computers and Fluids, 23: 551-574,1994

[10] Wu Z N. Uniqueness of steady state solutions for difference equations on overlapping grids. SIAM J. Numer. Anal., 33: 1336-1357,1996

[11] Wang H. A parallel method for tridiagonal equations. ACM Trans on Math. Software, 7:170-183,1981

[12] Wang L X, Caughey D. Multiblock/multigrid Euler method to simulate 2D and 3D compressible flow. AIAA paper 93-0332

[13] Rosenfeld M, Yassour Y. The alternating direction multi-zone implicit method. J. Comput. Phys., 110:212 220,1994

[14] Rosenfeld M, Yassour Y. Fully implicit solution of time-dependent PDE in arbitrary multi-zone domains. AIAA J., 33: 859-863,1995

[15] Chesshire G, Henshaw D. A scheme for conservative interpolation on overlapping grids. SIAM J. Sci. Comput., 15: 819-845,1994

[16] Wang Z J. A fully conservative interface algorithm for overlapping grids. J. Comput. Phys., 122:96 106,1995

[17] Gustafsson B, Kreiss H O, Sundström A. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems Ⅱ. Math. Comp., 26: 649-686,1972

[18] Wu Z N. Convergence study of an implicit multidomain approximation for the compressible Euler equations. Computers and Fluids, 25:181 196,1996

[19] Fox G, Johnson M, Lyzeznga G, Otto S, Salmon J. Solving Problems on Concurrent Processors, Volume 1. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988

[20] De Moura C A. Parallel algorithms for differential equations, Lectures Notes, LNCC, Rio de Janeiro, Brazilia, 1994. @zeus. funceme. br.

[21] Van de Velde E. Concurrent Scientific Computing. Springer Verlag, 1994

[22] Dirk Roose, Rafael Driessche. Parallel computers and parallel algorithms for CFD: an introduction. AGARD Report R 807, 1995

[23] Keyes D. Domain decomposition: a bridge between nature and parallel computers. Technical Report ICASE Rep. 92-44, NASA Langley Res. Center, 1992

[24] Van der Steen A J. An overview of (almost) available parallel systems. Ncf report, Stichting Nationale Computerfaciliteiten,'s Gravenhage, the Netherlands. December 1994. (Available via ftp from ftp. cc. run. nl, dir. / pub/BENCHMARKS/reports)

[25] Berrendorf R et al. Intel Paragon XP/S-Architecture, software environment, and performance. Technical Report KFA ZAM IB 9409, Forchungszentrum Julich GmbH, Germany, 1994

[26] Stunkel C B et. al. The SP2 Communication Subsystem. Technical report, IBM Thomas Watson Research Center, Yorktown Heights, NY,1994

[27] Silicon Graphics. The advent of Power Computing. Technical Report Power Challenge, Silicon Graphics, CA,1994

[28] Sunderam V S, Geist G A, Dongarra J ,Manchek R The PVM concurrent computing system: evolution, experiences and trends. Parallel Computing. 20(4): 531-746,1994(PVM is available via ftp from netlib2. cs. utk. edu)

[29] Walker D. The design of a standard message passing interface for distributed memory concurrent computers. Parallel Computing, 20(4): 657-673,1994

[30] Calkin R, Hempel R, Hoppe H C, Wypior P. Portable programming with the PARMACS message-passing library. Parallel Computing, 20(4):615-632,1994

[31] Ch H Koelbel, D B Loveman, R S Schreiber, G L Steel, M E Zosel. The High Performance Fortran handbook. MIT Press, 1994

[32] Chapman B. Zima H. Merhrotra P. Extending HPF for advanced data-parallel application. IEEE Parallel and Distributed Technology, 2(3): 59-70,1994

[33] Applied Paralled Research. FORGE 90 Distributed Memory Parallelizer User's Guide. APR, Placerville, CA, 1993. (Information on FORGE available by email request from forge@netcom. com.)

[34] Dongarra J J, Duff I S, Sorensen D C, Van H A der Vorst. Solving Linear System on Vector and Shared Memory Computers. SIAM, 1991

[35] Gustafson J, Montry G, Benner R. Development of parallel methods for a 1024-processor hypercube. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 9(4): 609-638,1988

[36] Gustafon J L. Reevaluating Amdahl's law. Communications of the ACM, 31(5): 532-533,1988

[37] Krechel A, Plum H , Stuben K. Parallel solution of tridiagonal linear systems. In F Andre and J Verjus editors, Hypercube and distruted computers, Pages 49-64,Amsterdam, 1989, North Holland

[38] Curchitser E N, Pelz R B. Implementation of the Euler equations on MIMD , Distributed Memory multiprocessor computers using cyclic reduction algrithm. In K G Reinsch et al editor, Parallel Computational Fluid Dynamics '91, Pages 97-112, North-Holland, Elsevier Science, 1992

[39] Honman M. The use of an approximate tridiagonal solver in a parallel ADI code. In K G Reinsch et al editor, Parallel Computational Fluid Dynamics '91, Pages 227-242 North-Holland, Elsevier Science, 1992

[40] Song Z W, Roose D, Yu C S, Berlamont J. A comparison of parallel solvers for the 2D shallow water equations on distributed memory parallel computers. In L Dekker, W Smit, and J C Zuidervaart editors, Massively Parallel Processing Applications and Development, Elsevier, 1994

[41] Linden B, Steckel B, Stuben K. Parallel multigrid solution of the N-S equations on general 2D-domains. Parallel Computing, 7:461-475,1988

[42] Braaten M E. Development of a parallel CFD algrithm on a hypercube computer. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 12:947-963,1991

[43] Cowsar L C, Dean E J, Glowinski R, Tallec P Le, Li C H, Periaux J, Wheeler M F. Decomposition Principles and their applications in Scientific Computing. In J Dongarra et al editor, Parallel Processing for Scientific Computing, Pages 213-237, SIAM, 1992

[44] Farhat C, Roux F X. Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics. Computational Mechanics Advances, 1994

第七章　工程应用举例

第一节　非定常大迎角的复杂流动计算

大迎角和非定常空气动力的计算经历了使用广义的偶极子格网方法，求解 Euler 方程方法，现已发展到求解 N-S 方程方法。用前两类方法模拟大迎角流动缺乏正确的物理根据，只有 N-S 方程能正确模拟压缩性和粘性的效应，因而在高速时能自动捕捉到流场中出现的激波，给出正确的激波位置和强度，能在大迎角流场中计及流场的粘性效应，包括三维分离的影响，而揭示出流场中的旋涡结构。

美国 NASA 各研究中心正在进行的"NASA 大迎角技术项目"的目的之一是为发展并验证一个适合于歼击机外形可靠的求解 N-S 方程的计算程序。此项目包括对大迎角研究机(HARV)F-18 的试飞，在各类风洞中的吹风试验，数值模拟计算以及对所得结果的分析比较等。NASA 的 Ames 和 Langley 研究中心正在努力发展能对 F-18 模拟计算的计算工具。本节介绍的关于 F-18 全机的一些计算结果也主要取自 Ames 的结果，即由 F3D 的流场计算程序和 Chimera 的重叠网格技术程序组成的计算软件所得的结果。

时间推进薄层程序 F3D 采用了部分矢通量分裂和近似因子分解技术相结合的计算格式，即在流向进行矢通量分裂和迎风空间差分，而在其它两个方向保持中心差分，于是形成双近似因子分解方法。对于时间积分，在研究定常流动时可用一阶精度以加大时间步长，而在研究非定常流动时，可取二阶精度[1]。Chimera 重叠网格技术见第四章。

一、对称与非对称流动

图 7-1 表示了 F-18 的外形和计算网格。图 7-2 和图 7-3 分别给出了 $Ma_\infty=0.243$，$\alpha=30.3°$，

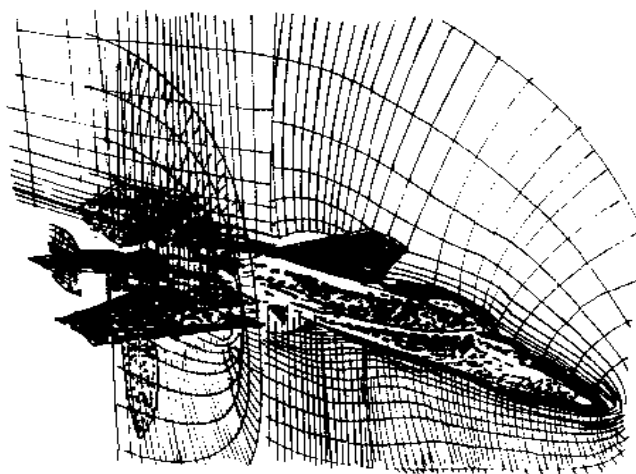


图 7-1　F-18 外形和计算网格

$Re=10.0\times10^6$ 时 F-18翼身组合体 LEX(前缘前伸)的分离涡位置的计算值和飞行试验值，两者都明显地反映出 LEX 的分离涡在机翼与 LEX 交点附近发生破裂，计算值 $X/L=0.49$，飞行试验 $X/L=0.42$，差异一是计算时前缘襟翼未偏，而实际飞行时，前缘襟翼是偏转的；二是机身网格还不够精细，一般来说，网格粗会使破裂点计算位置推后；三是计算中没有考虑尾翼[2]。



图 7-2　F-18 翼身组合体前缘前伸的分离涡位置的计算结果



图 7-3　F-18 前缘前伸的分离涡位置的飞行试验结果

图 7-4 给出了 $Ma_\infty=0.243$，$\alpha=30.3°$，$Re=11.0\times10^6$，$\beta=-4.5°$时非对称流场的计算结果。图中用流体质点的空间轨线显示了 F-18 翼身组合体机身和 LEX 的旋涡[3]。由图可见侧滑的两个效应：第一个是机头产生的旋涡由对称变为非对称，迎风面的涡更靠近对称面，背风面的涡则几乎位于 $\varphi=110°$的位置；LEX 的旋涡也由于侧滑而位移，迎风面的涡向下并向里移动，背风面的涡则往上和往外移动。F-18 的飞行显示研究也得到了类似的结果。侧滑的第二个效应是改变了 LEX 的涡破裂点位置，迎风面 LEX 涡破裂点位置要比背风面的更靠前，水洞实验与飞行试验也都证实了这种破裂点位置的差异。计算的破裂点位置比实际飞行中观察到的要靠后，可能仍与网格不够精细

以及进气道未模拟通气有关。

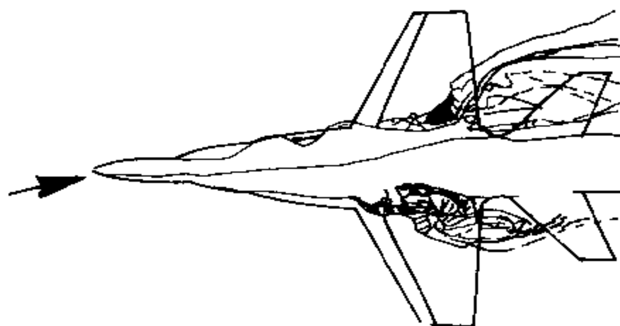


图 7-4　F-18 非对称流场计算的流体质点轨线图

图 7-5 给出了表面压强分布的比较。由图可见，计算结果与飞行试验、风洞实验结果都吻合得很好。由于风洞实验的 *Ma* 数与计算和飞行试验的 *Ma* 数不完全一样，风洞实验结果有些偏离。可见，表面压强分布受 *Ma* 数的影响，尤其在 LEX 附近。图中还显示机身右部（背风面）的压强稍高，这是受涡位移影响的结果。

二、非定常计算

F-18 立尾抖振的数值计算可作为非定常气动力计算的实例。空气动力与结构的相互作用计算可分为强耦合和弱耦合两种。当结构变形会引起空气动力巨大变化时，需按强耦合计算，反之则可作弱耦合计算。强耦合计算需要将气动力和结构联合求解，需要更大的计算资源，目前采用移动网格技术也只能进行单独机翼的强耦合计算。F-18 立尾抖振的数值计算是一种弱耦合计算。

试验表明，F-18 立尾抖振是一种弱相互作用问题，其求解过程可分为两步：首先假定立尾是刚性的，计算全机的非定常流场，然后将作用在立尾上的非定常气动力载荷作为强迫源来确定柔性立尾的变形并研究其响应。计算全机非定常流场的状态为 $Ma_{\infty}=0.243$，$\alpha=30.3°$，$Re=11\times10^{6}$，并根据相应的飞行状态取前缘襟翼下偏 33°，水平尾翼下偏 7°。计算开始时，快速求解其定态解，然后将此定态解作为非定常求解的初始条件，计算每一时刻 t 的流场，在每一时刻 t 流场解的基础上再对立尾的载荷作非定常时间过程的分析并计算其结构的效应[4]。

非定常流场的计算证实了在涡破裂点前的上游流场基本是定常的，在涡破裂点位置及其下游的螺旋流动具有很强的非定常性。压强分布的计算结果较好地与试飞数据相吻合。图 7-6 给出了作用在立尾的侧向力、弯曲力矩和扭转力矩随时间变化的曲线。可以看出除开始的过渡过程外，它们随时间基本上是作周期性的变化。为研究这种非定常性的频率范围，将弯曲力矩作快速 Fourier 变换。分析表明，其主频范围为 15～20Hz。表 7-1 给出了立尾的结构模态数据，可见作用在立尾上的非定常载荷的主频很接近立尾本身的的一次弯曲模态频率。可以相信，在飞行条件下 F-18 立尾的抖振主要是由于作用在它上面的气动载荷的主频接近于尾翼本身的一次弯曲频率而诱生的。图7-7 还给出了计算、实验和试飞所得气动载荷频率的比较，可见彼此吻合，并表明了给定迎角下 F-18 立尾抖振频率与飞行速度呈线性变化关系。

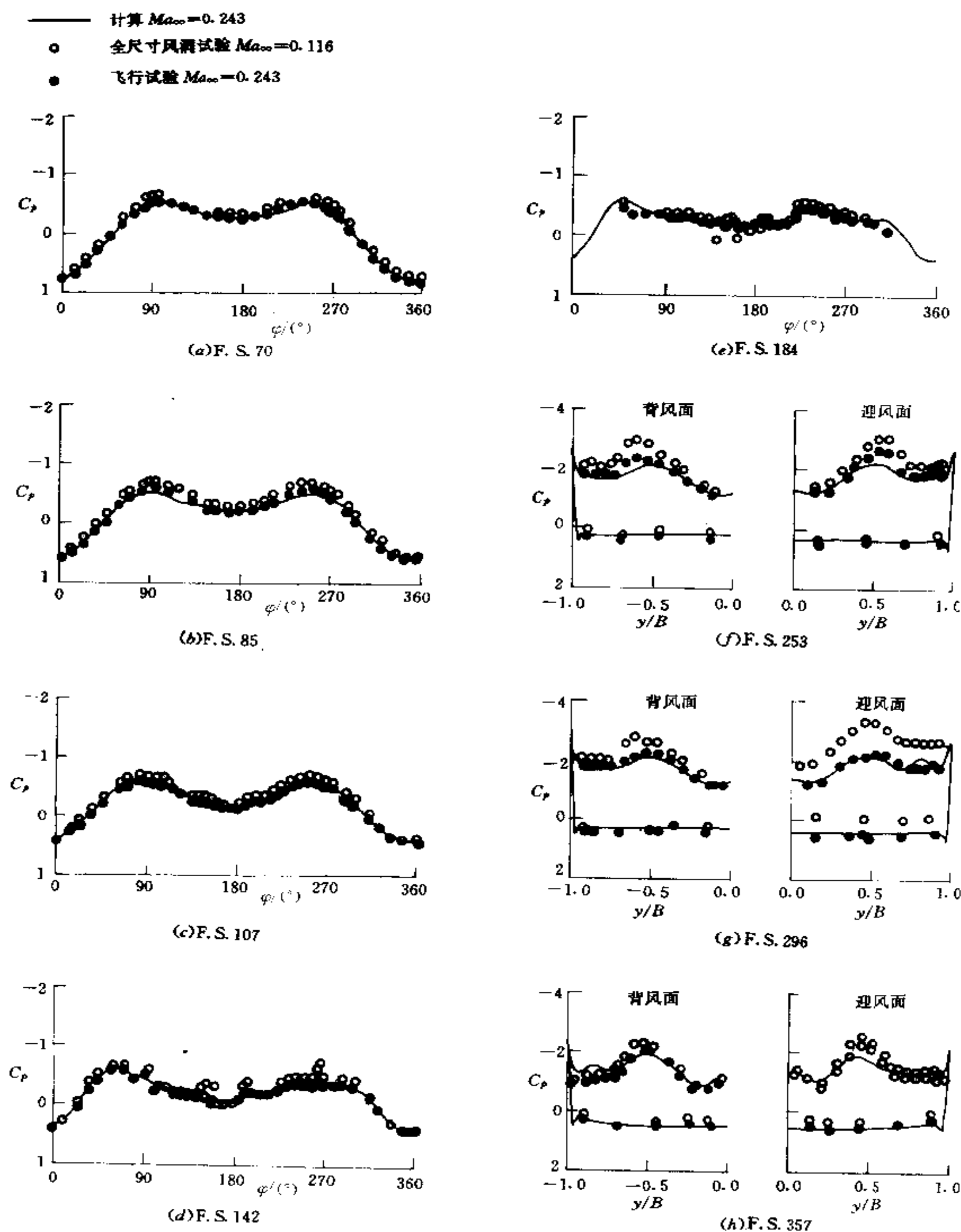
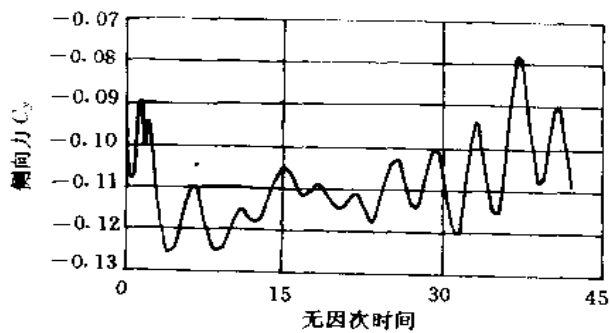
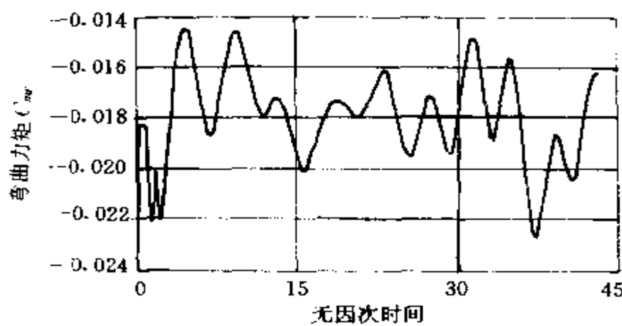


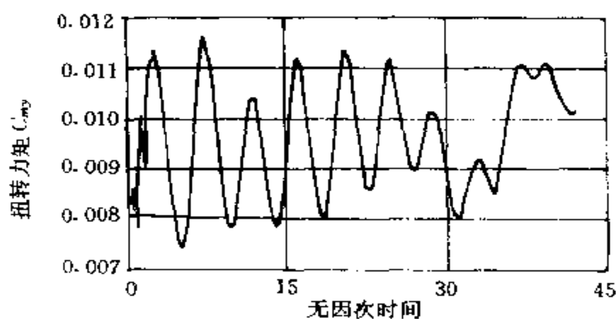
图 7-5　F-18 非对称流动压强分布的比较



(a) 侧向力



(b) 弯曲力矩



(c) 扭转力矩

图 7-6 F-18 立尾侧向力、弯曲力矩和扭转力矩随时间的变化

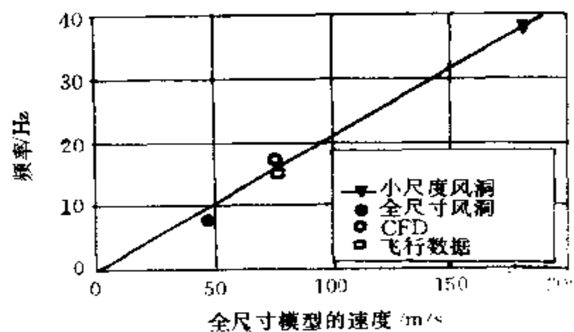
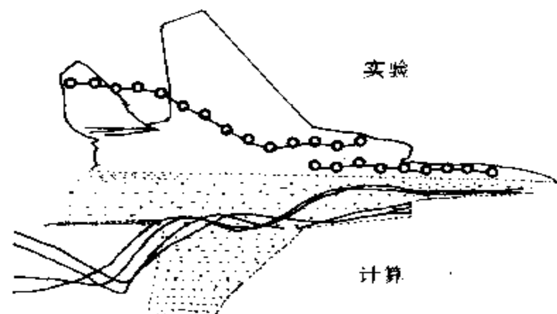


图 7-7 计算、实验和试飞的气动力载荷频率随速度的变化



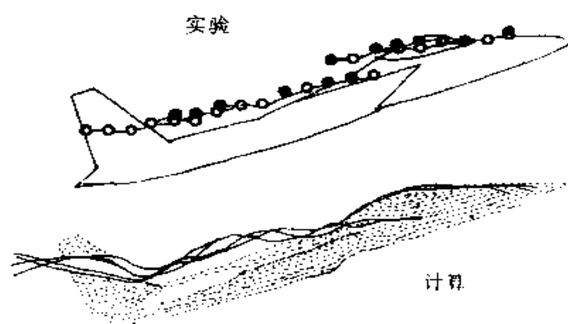


图 7-8 F-15 翼身进气道外形的流体质点轨线计算和实验值的比较

表 7-1 立尾的结构模态数据

模态次序	内容	频率
1	一次弯曲	15 Hz
2	二次弯曲	49 Hz
3	一次扭转	74 Hz

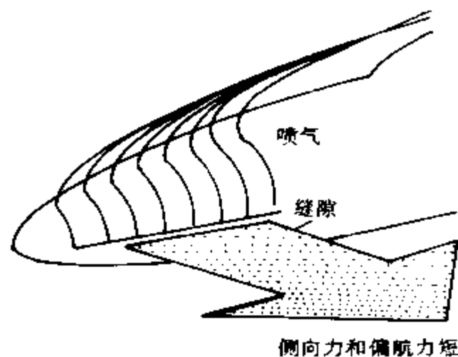
三、F-15 全机的计算

除对 F-18 的大量计算外，对其它歼击机外形也有了不少 N-S 方程的计算结果，如 F-16 的跨声速小迎角计算，鸭式布局 X-31 的大迎角计算，简化的 F-15 全机定常、非定常计算。图 7-8 给出了 F-15 翼身-进气道外形的流体质点轨线显示的分离涡，可以看出它们在展向的移动和抬起与流动显示的实验结果很一致[5]。

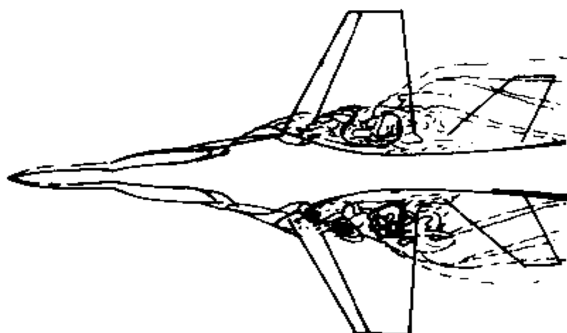
四、前体涡控制的计算

在大迎角时前体引起的对称涡结构对整个飞机的运动会产生很大的影响，如即使在无侧滑时也会有大的侧向力矩，会引起机翼摇摆等等，而这时舵面的效率又基本上全部丧失，所以必须探求其它控制方式。空气动力(分离和旋涡)的控制方式包括：可动的边条、表面喷流、表面缝隙的吹吸气、表面孔的吸气、旋转的头部小边条等方法及减弱不对称侧力的被动控制技术。

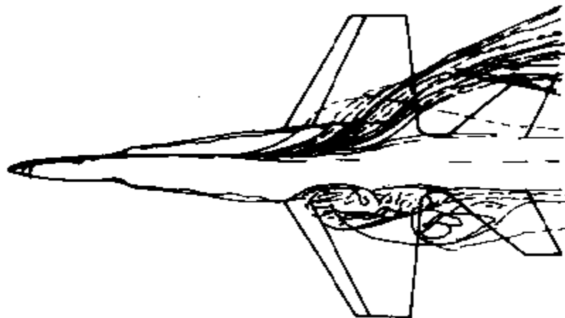
图 7-9 给出了 F-18 全机头部表面缝隙吹气的计算质点轨线图，用以表示吹气对机翼前缘前伸(LEX)分离涡点的影响，计算条件是 $Ma_\infty=0.243$，$\alpha=30.3°$。结果表明，不吹气时涡破裂位置 $x=9.75\text{m}$，当吹气动量系数 $\mu=0.57\text{kg}\cdot\text{m/s}$ 时，在吹气侧 $x=8.53\text{m}$，在不吹气侧 $x=12.2\text{m}$，即吹气使吹气侧的涡破裂点位置提前，不吹气侧的位置延后[3]。图 7-10 给出了计算压强分布和实验数据的比较，两者吻合得较好。在翼面上的差异可能是由于缝隙处的网格不够理想与湍流模型的不足。



(*a*) 示意图



(*b*) 无吹气解



(*c*) 吹气解

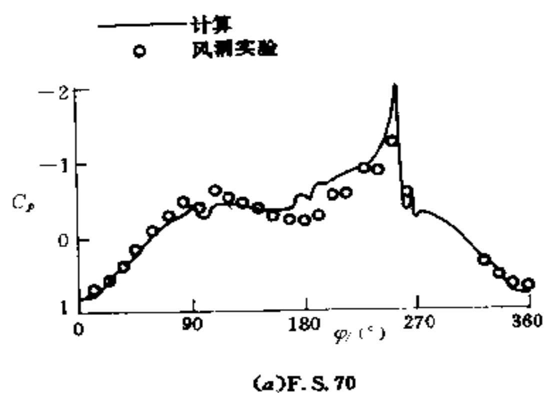
图 7-9　F-18 头部缝隙吹气流体质点的计算轨线图

第二节　内外流一体化数值计算

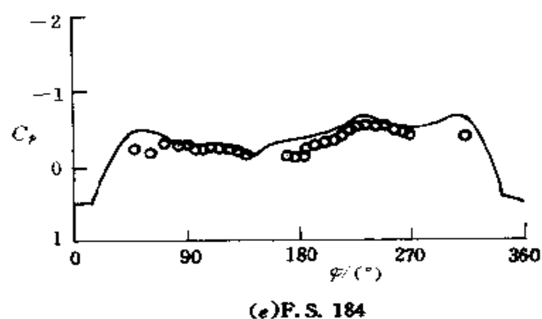
现代歼击机的设计要求考虑飞机/推进系统一体化设计，即要求内外流的一体化计算。这显然是对计算流体动力学的一个巨大挑战，从某种角度来看，对内流流动的数值模拟要比对外流流动更为困难，要求也更高，因为：

第一，在内流计算中，流动的边界限制于较小的空间范围，粘性效应就很突出，存在边界层分离和很强的二次分离流，无粘分析几乎没有什么意义而必须依靠三维雷诺平均的 N-S 方程数值分析。

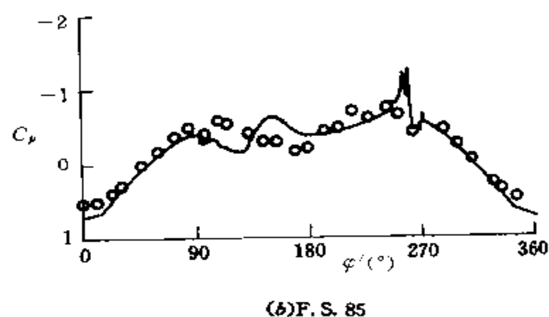
第二，由于内流流动基本上是带有严重分离的湍流流动，因此正确的湍流模型对内流就远比对外流更为必要，而目前所有关于湍流模型的知识还远远不够，不能符合内流分析的要求。



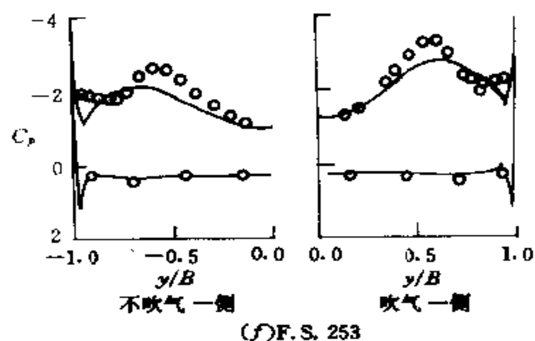
(a)F.S.70



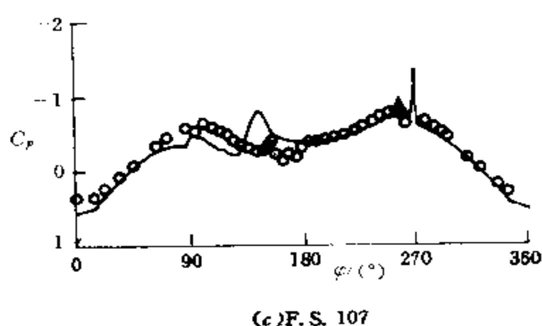
(e)F.S. 184



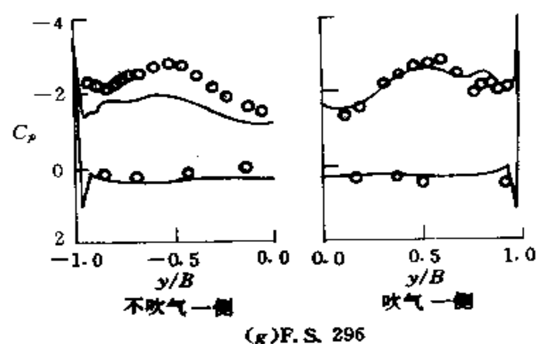
(b)F.S. 85



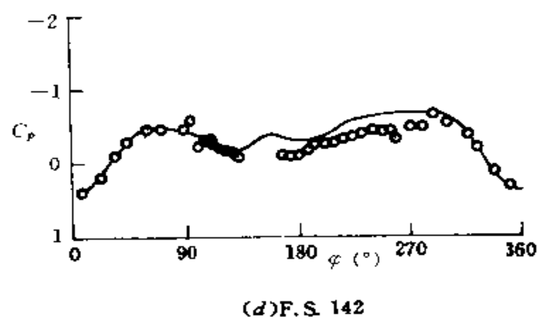
(f)F.S. 253



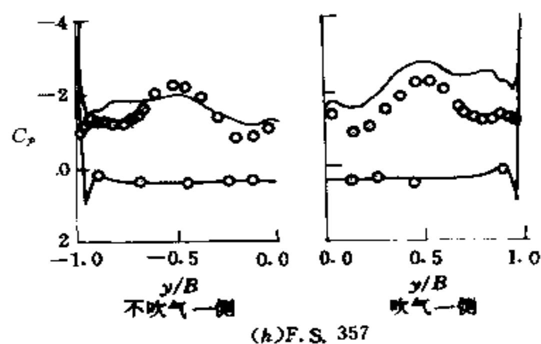
(c)F.S. 107



(g)F.S. 296



(d)F.S. 142



(h)F.S. 357

图 7-10　F-18 头部缝隙吹气流动的压强分布比较

第三，内流的复杂性（存在很强的反压梯度和粘性相互作用）使内流解的收敛较慢，对于相同网格数和相同 Ma 数的类似问题，内流解所需要的计算时间可能会比外流解所要求的高一个量级。

综上所述，为进行内、外流的一体化计算，挑战是十分严峻的。经常是通过多区域网格技术求解雷诺平均 N-S 方程来进行。直到目前，这方面所取得的进展和获得的结果比单纯外流场的计算要少得多。

对飞机-进气道系统进行分析计算所需的最低要求的模型应是包括前机身、进气道（内外表面形状）、进气道附近飞机及进气道自身有关重要部件组合的复杂外形，在进气道内部还要求包括扩压管道。对于这样复杂外形的流场，目前尚不可能做到对实际外形的完全模拟，常需做些必要的，但不影响流动的主要特征的简化。

图 7-11 给出了亚声速进气道一体化计算的某例——AV-8B 前机身/进气道计算的几何模型与表面网格（三个子域）[6]。图7-12 给出了 $Ma_\infty=0.67$，$\alpha=10°$时计算结果和相应实验数据的比较。由图可见三维多区域 N-S 方程 X3D 的计算结果与实验数据吻合得较好，图中还给出了计算的表面等压线分布。

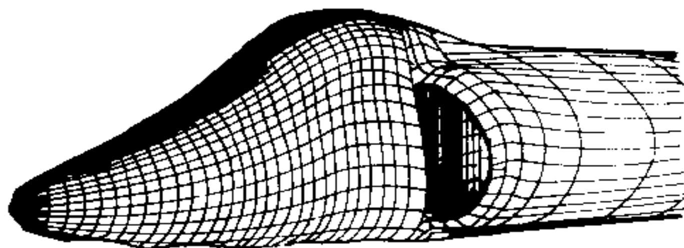


图 7-11　计算的几何模型与表面网格

最近，用推广 F3D 和 Chimera 于此外形所得的计算程序 VAPOR 计算了更为细致和精确表示的 AV-8B 外形[7]。图 7-13 表示了局部外形和网格，图 7-14 给出了下唇口内表面的压强分布，可见改进的计算更接近于实验数据。

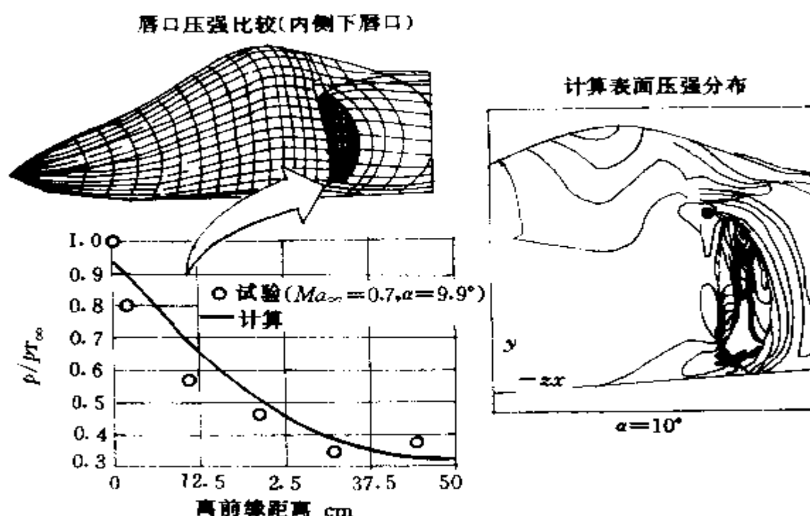


图 7-12　计算和实验数据的比较

F-18 在大迎角情况下外流和进气道的耦合计算结果与试飞数据再一次证明，发动机的进气流动对 LEX 产生的旋涡流动有很大的影响，进气道的进气流量增加（相当于推力加大），涡破裂位置向下游移动。为实现这种耦合计算，在描述 F-18 全机的外形时，较精确地描绘了进气道的扩压管和外罩、边界层吸气口和隔离板、发动机舱与机翼的交接处，并在压气机下游布置了一个收缩扩张的喷管。因计算主要目的是讨论进气流动对外流的影响，对进气道本身未作细致而精确的描述。为与试飞条件一致，计算时取机翼前缘襟翼下偏 33°，后缘襟翼不偏，水平尾翼下偏 7°、计算 $Ma_\infty=$

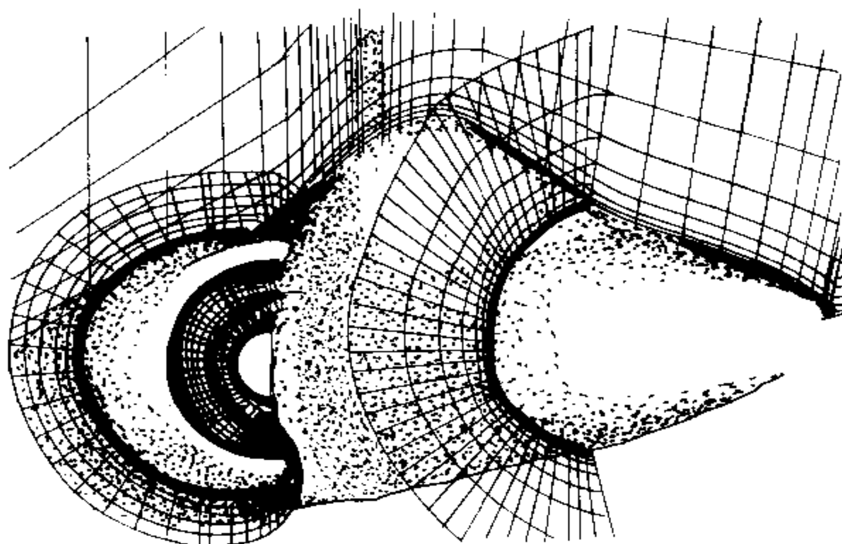


图 7-13 计算的几何外形和网格

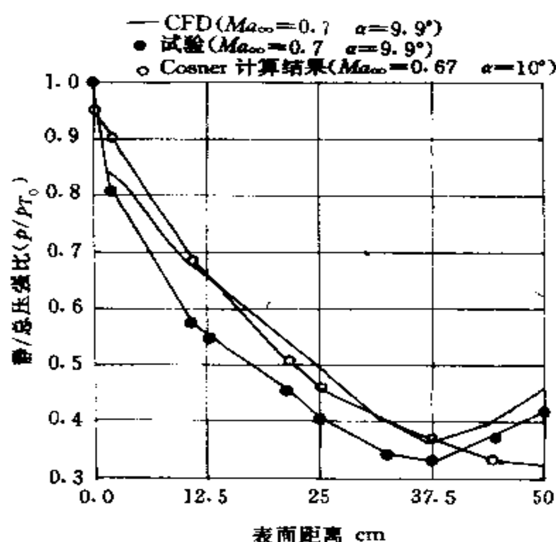


图 7-14 下唇口内表面的压强分布

0.243，$\alpha=30.3°$，$Re=11\times10^6$。图 7-15 给出了局部的几何外形和表面网格。图 7-16 给出了三种情况下计算所得的流体质点轨线，即不考虑边界层隔板和进气的情况，两种极限进气量——相当于发动机空载和发动机最大功率的情况[8]。由图可见，随进气量的增大，涡破裂点位置明显地向下游移动，图(a)中绕光滑处理进气道的 F-18 流动涡破裂点位于机翼前缘的上游，图(c)中对应发动机最大功率时则位于机翼前缘的下游。这种涡破裂点位置随进气量变化而移动的趋势在飞行试验中也得到了证明[8]。

最近，美国空军为加强现役歼击机 F-15 的对地防卫能力，需要在前机身处加配一组天线(约 1.05m～2.4m 长，0,15m 高)，其位置正好处在前机身/进气道一体化设计的区域内。以前研制 F-15 时，为采用飞机/进气道一体化设计概念，经历了 5 年三个阶段的大量吹风实验，才获得了优化

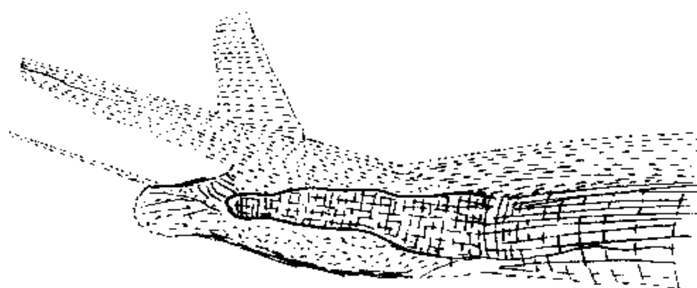


图 7-15　局部几何外形和表面网格

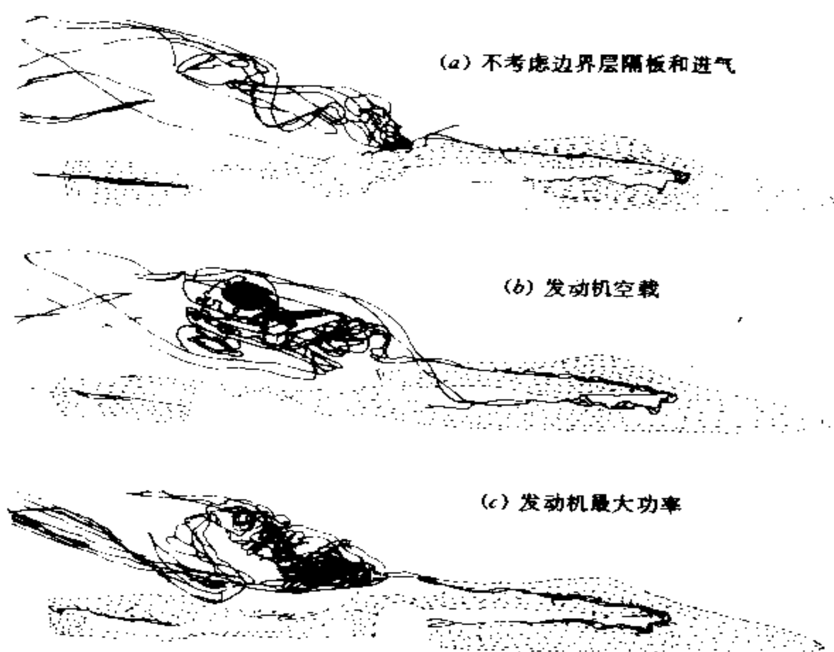


图 7-16　三种不同进气道状态计算的流体质点轨线图

的外形和较好的流场品质。麦道公司考虑到现有的求解亚跨超声速绕流的 N-S 方程数值方法和计算软件完全可以承担凸起物的外形尺寸以及它与机身/进气道相对位置的优化设计，只需有限的风洞实验来加以验证。他们首先利用统计方法减少可调参数的数目以节省计算资源和机时，然后大量计算求解 N-S 方程，提供对流场的深入剖析并取得优化设计的初步结果。$Ma_\infty=0.9$ 和 1.6 的风洞实验测量出了计算所选出的典型凸起物（一种较差的，两种中间的，一种最优的）对进气道性能和气流品质影响的数据，进一步验证并最终取得最佳结果。这里风洞实验是对数值模拟分析的补充、完善和验证，因而大大缩短了风洞实验项目的规模，降低了费用并加速了研究周期。图 7-17 表示了 $Ma_\infty=1.6$，$\alpha=0.5°$，$\beta=6°$的数值模拟结果，显示了凸起物对其它部件和总体流场影响的特征[9]。

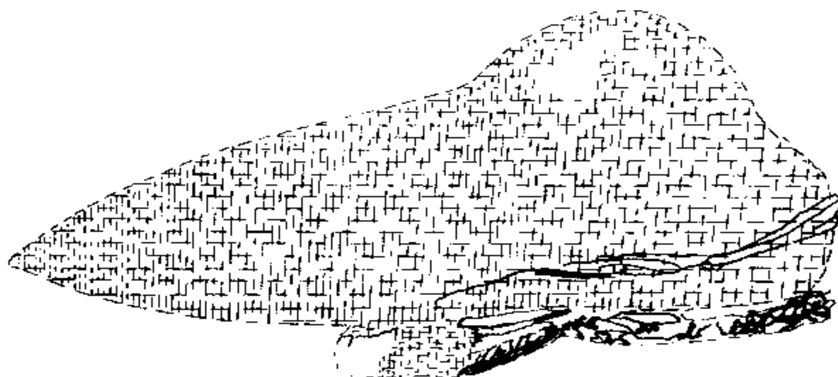


图 7-17　凸起物对流场影响的数值模拟结果

第三节　跨超声速计算

美国 Lockheed 公司在设计下一代(第四代)先进技术战斗机 F-22 的过程中,用求解 N-S 方程的计算程序 TEAM 计算了全机的所有气动载荷,共约 370 种流动状态,包括了 Ma 数从 0.6 到最大 Ma 数,迎角从 $-4°$到 $24°$,侧滑角从 $0°$到 $5°$,以及机翼前后缘襟翼、水平尾翼和方向舵等的各种偏转情况[10]。TEAM 计算程序采用了改进的 Jameson 方法。全机的网格是由在半模型上共 42 个子域组成的,共 1 250 000 个网格点。在 Cray 巨型机上共计算了 1600 小时。图 7-18 给出了 $Ma_\infty=0.8$,$\alpha=8°$时气动载荷的计算与实验值的比较。Lockheed 公司宣称,由于采用数值模拟取代风洞实验提供全部气动载荷,大大节省了成本并缩短了研制周期。

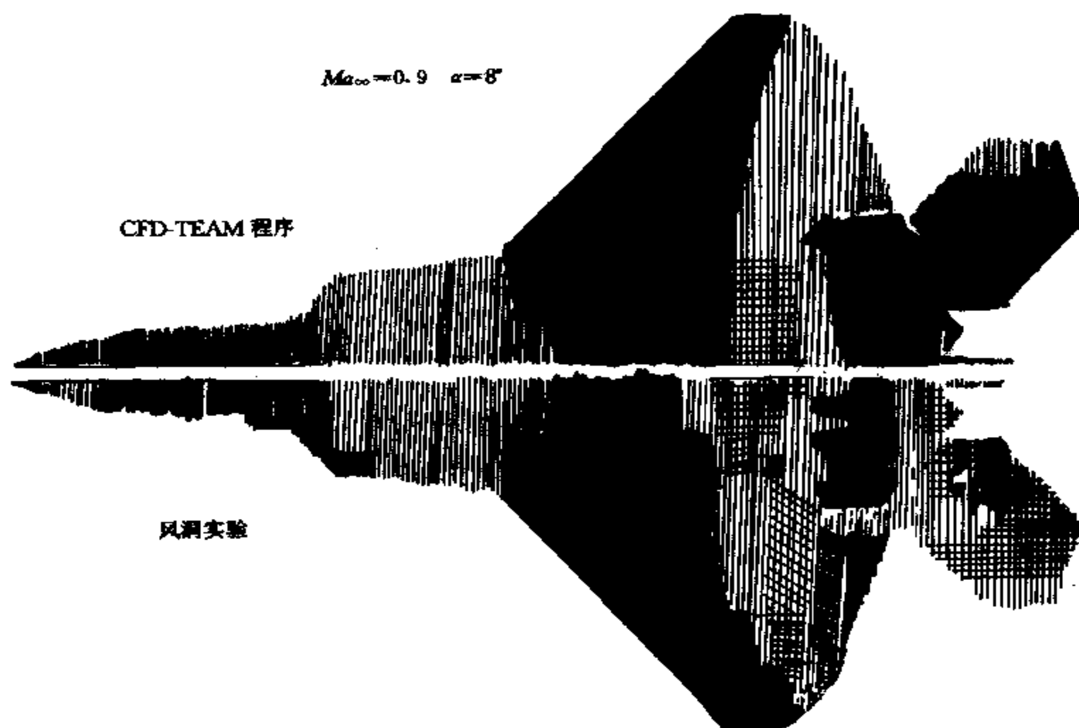


图 7-18　F-22 表面压强分布计算和实验结果的比较

第四节 YAV-8B 全机近地面绕流

第一章中指出考虑地面影响的垂直短距起落飞机 YAV-8B(Harrier,STOVL)的全机绕流流场是极其复杂的,采用缩小尺度的实验来研究这种复杂的干扰流场是极其困难的,由于复杂的尺度影响,定量的测量数据可能是很不可靠的;通过昂贵的全尺寸地面实验或空中试飞来获得可靠的定量数据需要巨大的投资和漫长的周期;然而数值模拟方法可以多快好省地分析这种复杂的流场。

由于几何外形和流动结构很复杂,因而对网格生成的技术要求也较高,数值模拟中综合使用了 S3D(表面几何数据的处理),GRIDGEN,Chimera(包括 HYPGEN,3DGRAPE 和 PERGSUS)等网格生成软件,形成了 18 个子域组成的总体计算网格,子域之间的边界有重叠的,也有对接的(patched),网格点总数为 2 800 000。其中一半左右的网格点用来求解矢量喷流、喷流诱导的流场以及近地面的边界层的流动。流场计算采用了 OVERFLOW 程序[11],它使用了类似于 F3D 的方法,其中空间离散方式为:流向是矢通量分裂和迎风空间差分,而在其它两个方向保持中心差分。由于时间精度在本数值模拟中并不重要,故用 Beam-Wearming 对角化的计算格式,只保持一阶时间精度。

图 7-19 给出了 $V_\infty=30$ 节,$H=9\text{m}$,$\alpha=8°$时数值模拟前后喷流的流动基本结构,它证实了对流动结构的原始分析,并与采用红外图形分析技术取得的试飞结果的流动结构很一致[12]。

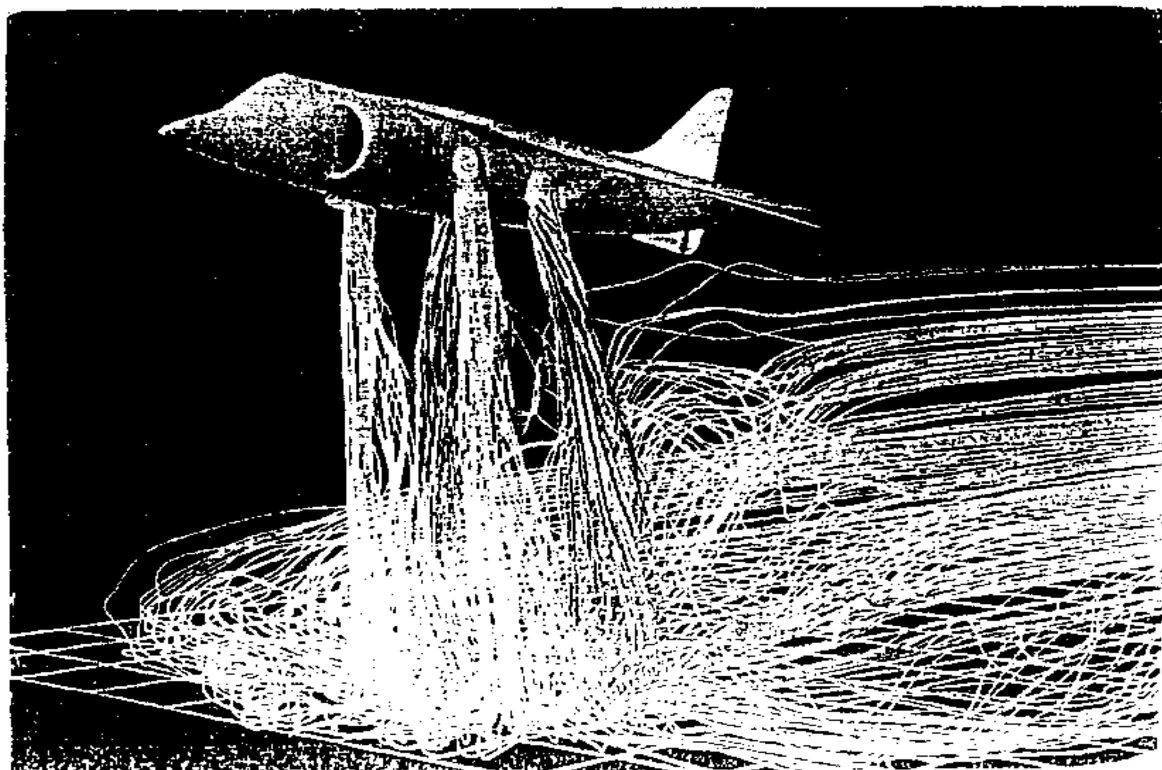


图 7-19 YAV-8B 全机考虑地面效应的计算结果

第五节　飞机带外挂物及外挂物分离时绕流的计算

现代歼击机的武器主要是外挂导弹，而导弹发射的初始阶段对母机的安全性有着重要的影响。两物体六自由度的任意相对运动是一个非定常问题，准确分析和计算导弹上的非定常气动力很不容易，但却是决定导弹轨迹的主要依据。这一问题在理论上经历了从细长体理论、线化理论到非线性理论的发展过程；在数值方法上70年代采用低阶面元法，80年代采用高阶面元法，最终采用了非线性Euler/N-S方程方法。采用动态重叠网格技术可利用两个或几个不同网格的叠加来描述有相对运动时的整体复杂外形和各物体随时间变化的准确位置；Euler方程解给出了流动的非线性影响，两者结合可给出准确可靠的计算结果。图7-20给出了用SSP（线性方法）和DOG（非线性方法）两种方法计算的副油箱的轨迹[13]。可以看出，两种方法给出的重心位置差别不大，但若考虑到

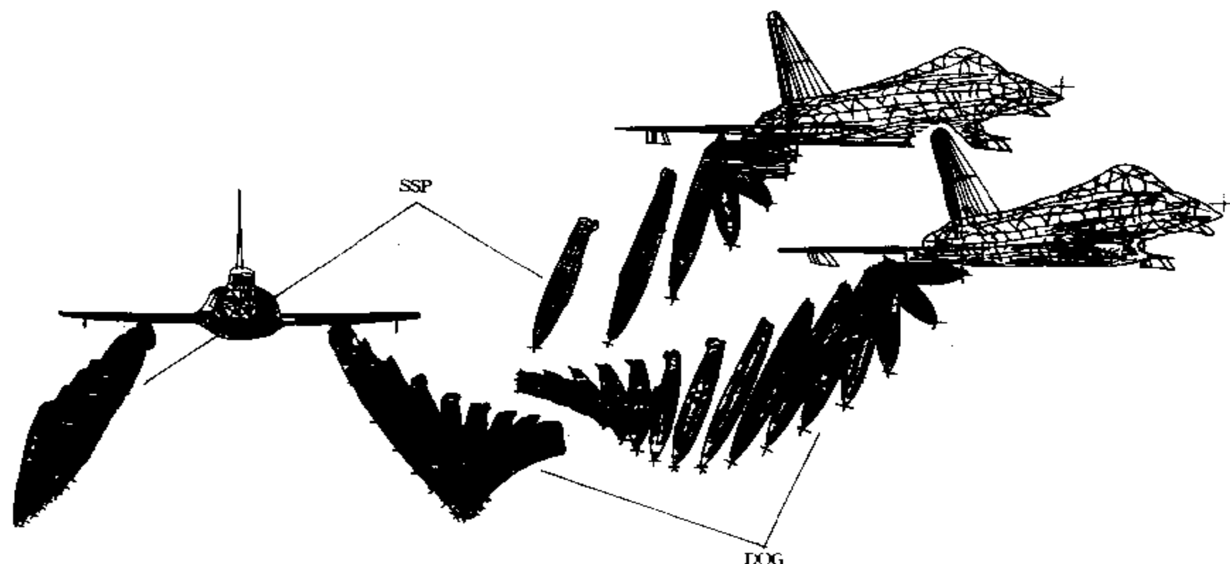


图7-20　两种方法计算的副油箱轨迹

油箱的滚转力矩，则显出轨迹有较大差别。图7-21给出了运动初始阶段用两种方法计算出的滚转力矩，所得力矩符号相反，因而所得副油箱绕x轴运动的方向也相反，表明动网格中Euler解的压心位置完全不同于线性理论所确定的压心位置。在某些临界情况下，外挂物分离的轨迹决定着母机的安全性，因而现代歼击机设计中很需要能正确计算分离轨迹的工具，以便在设计中对外挂物及其布局提出更切合实际的规定和要求。

Gillyboeuf等采用两种Chimera技术（对接技术CPM和重叠技术COM）并求解Euler方程分别计算了MICA（空-空导弹）和ASMP（空-地导弹）从"幻影2000"战斗机脱落初始阶段的绕流。图7-22为两种Chimera技术的原理图。在MICA的计算中采用CPM技术，取8个子域共290 000个网格节点，在飞机上取4个子域共292 000个网格点，来流条件为$Ma_\infty=1.5$，$\alpha=10°$。计算结果表明[14]，作用在导弹上的升力、侧向力、俯仰力矩、偏航力矩等系数与实验数据很一致。图7-23给出了飞机和导弹表面等Ma数的分布图形。在ASMP的计算中采用COM技术，取11个子域共188 960个网格节点，在飞机上取10个子域共259 688个网格节点。图7-24给出了飞机和导弹表面等Ma数的分布图形。

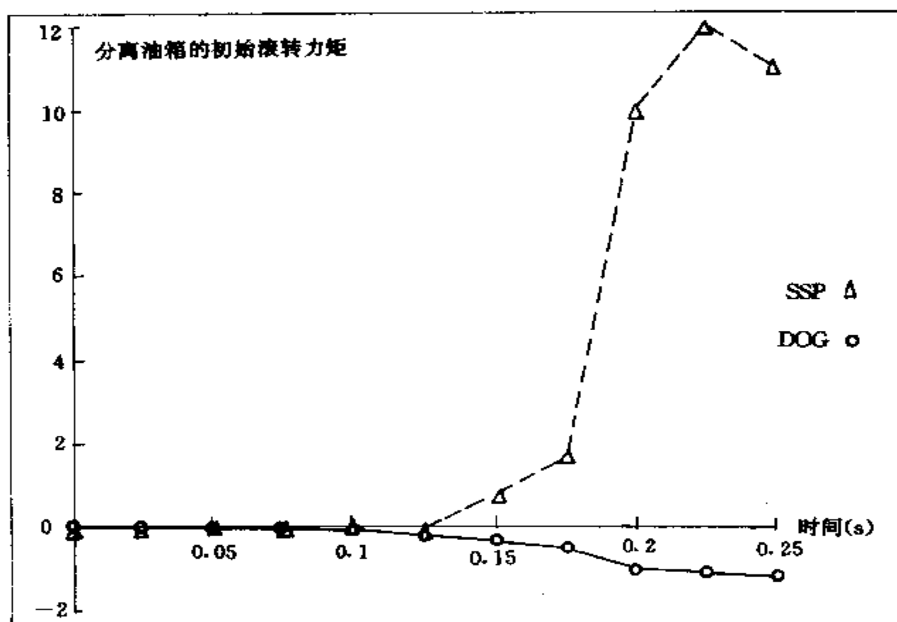


图 7-21 两种方法计算的滚动力矩比较

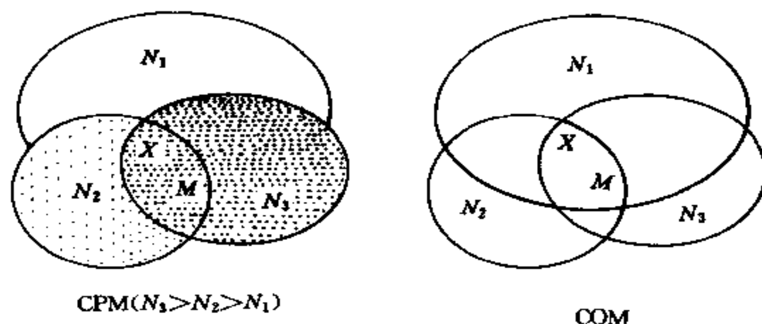


图 7-22 两种 Chimera 技术的原理图

Welterlen 等采用非结构方法(基于笛卡尔坐标的)对从 F-16 战斗机投放 MK-84 炸弹进行了数值模拟[15]。他们采用了 700 000 个网格单元,共 1 400 000 个网格面元,在其中求解 Euler 方程以获得绕流的气动力特性。他们在投放轨迹中取出五个站位,分别计算了各站位处作用在炸弹上的气动力,以它们作为基础计算出投放轨迹(显然五个站位是太少了);相应地以实验中天平测量的气动力数据作为基础也计算了投放轨迹,图 7-25 给出了两种结果的比较,可见两者吻合一致。

上述计算和比较表明,采用非线性方法可以较准确地计算导弹发射或炸弹投放过程中各个位置和姿态时作用在它们上的定态空气动力。然而这些计算还只是探索性的研究,为适应飞机设计的实际需要,必须能准确计算与运动方程相耦合的非定常过程。

最近 Baum 等采用非结构方法对从 F-16(C/D)战斗机(带有多种导弹和外挂)投放 370 加仑副油箱初始阶段(0.171 秒内)的时间过程进行了数值模拟[16],计算包括整个释放过程直至副油箱完全脱离飞机每个时间步长上作用于飞机和副油箱上所有的力及副油箱的位置和姿态。为了验证

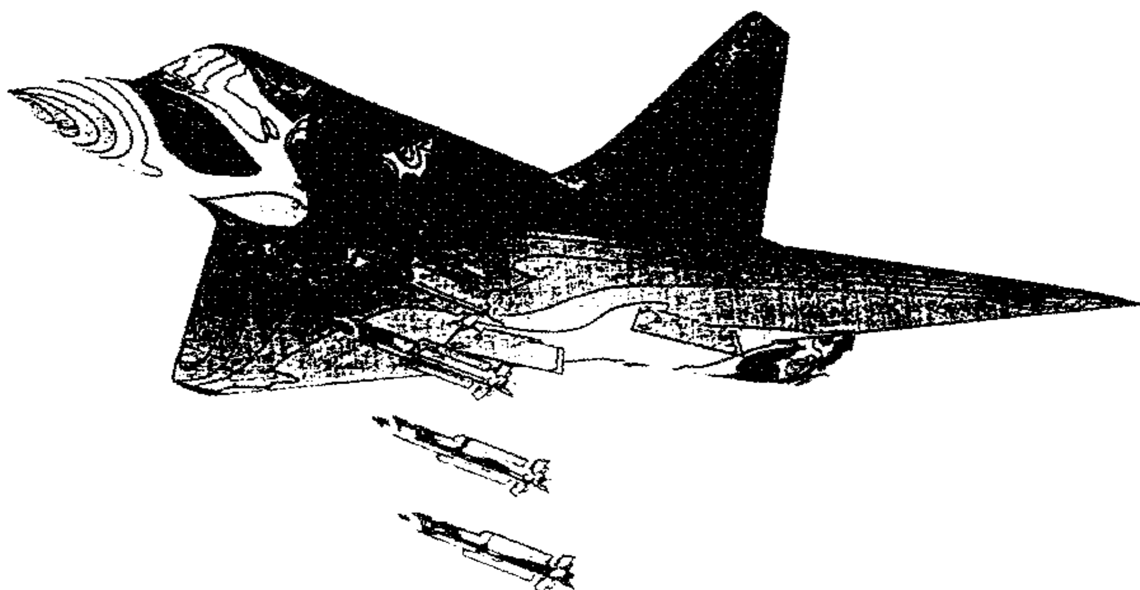


图 7-23 MICA 和幻影 2000 表面等马赫线分布

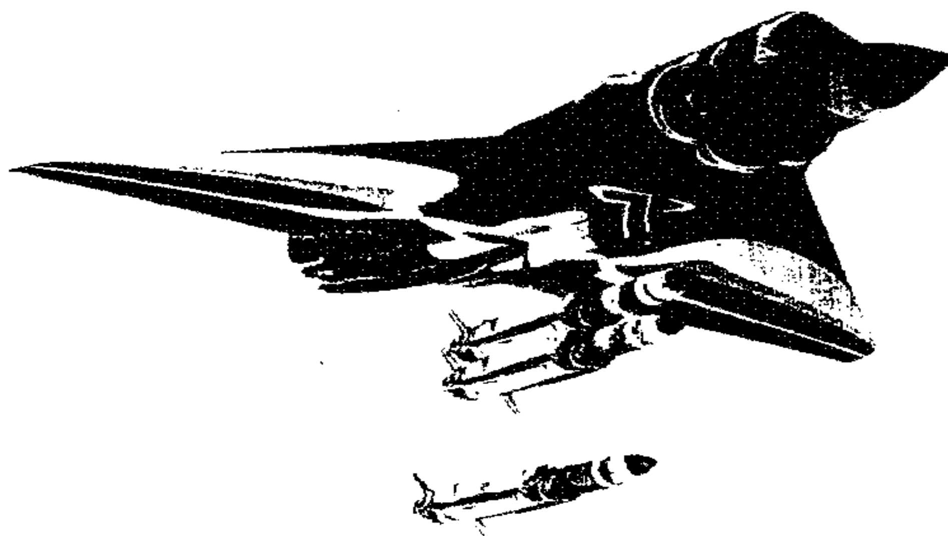


图 7-24 ASMP 和幻影 2000 表面等马赫线分布

其 Euler 方程计算结果的准确程度，首先对带所有外挂的飞机作了定态计算，并与风洞实验进行了对比；分别计算了 $Ma_\infty=0.851$，$\alpha=-5°,0°,2°,3.5°,5°$和 10°的状态。对比表明：法向力、侧向力和俯仰力矩的计算与实验结果符合得很好；偏航力矩稍差，其主要原因是数值模拟中对 MK-82 外挂的几何描述不精确，而分析局部流场可知，MK-82 外挂和挂架等产生的激波将冲击副油箱外侧，对

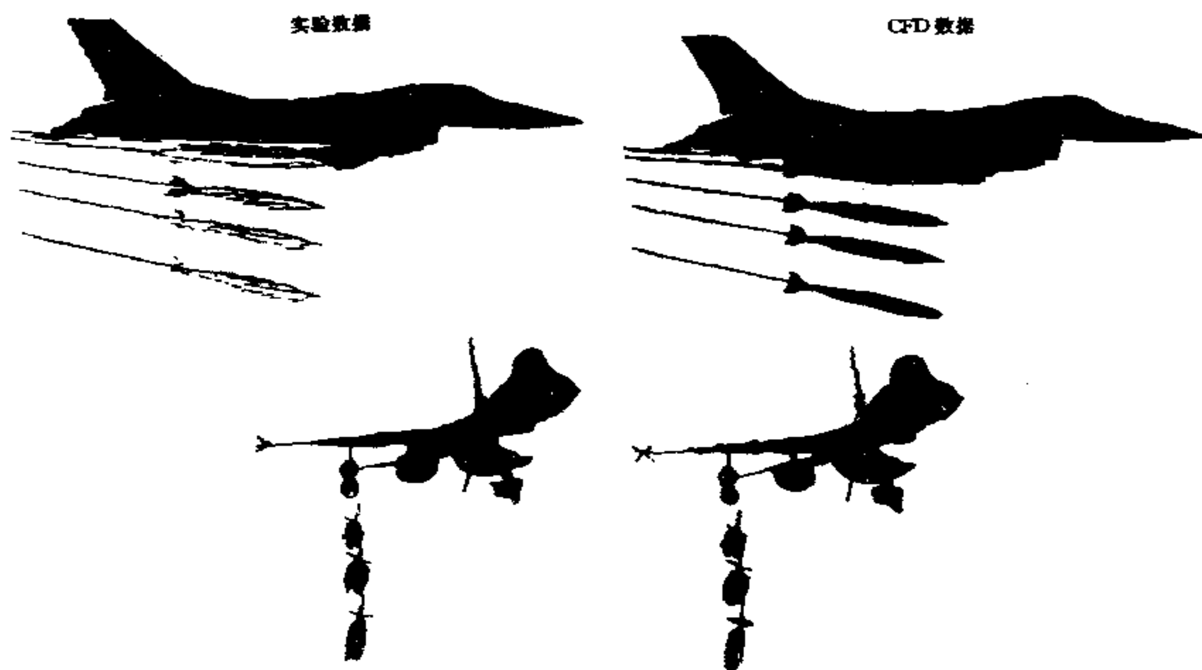


图 7-25 计算和实验数据确定的轨迹比较

副油箱的侧向力产生较大影响。然后在 $Ma_{\infty}=0.851$，$\alpha=2°$时投放副油箱，采用求解 Euler 方程方法对直到 $t=0.171$s 进行时间过程的数值模拟，以探讨惯性力或粘性力对油箱轨迹的影响。图 7-26 分别给出了 $t=38.772$ms，79.215ms，107.780ms，134.110ms 和 154.250ms 时的表面网格和母机与油箱的相对姿态。图 7-27 给出了油箱俯仰角随时间变化的计算值与风洞实验值及试飞值的比较，由图可见，计算值与试飞值很吻合，这表明在投放的初始阶段是惯性力控制着油箱的俯仰角；滚动角的吻合较差，这是因为滚动角主要是由粘性力确定的。因此，要准确地确定油箱的轨迹与姿态，必须进行 N-S 方程模拟。从 $t=0$ 至 $t=0.171$ 秒解 Euler 方程的整个数值模拟进行了近 57 200 时间步，需要 Cray C-90(单 CPU)计算机 86.2(CPU)小时，可见计算量之大。但对比风洞实验，数值模拟仍显示了高效和经济的优点。

第六节　非常复杂组合体外形的绕流计算

CFD 的目标是要能对任意复杂的外形进行绕流计算。航天飞机发射运载系统(SSLV)是目前计算流体界能进行计算的最复杂的飞行器外形。该外形包括轨道器、外部油箱和两个固体火箭助推器(图 4-8)。Pearce 等[17]利用 ICEM 软件成功地生成了 SSLV 的表面外形，并采用双曲型方程网格生成方法和重叠分区网格技术(Chimera)生成了 113 个分区共 1 640 万个网格点，将分区算法和流场解计算程序 OVERFLOW[11]相结合计算典型的跨声速流场，并与实验数据、试飞数据和工程估算等作了比较[18,19]。图 7-28 为 SSLV 重叠网格的示意图。图 7-29 给出了轴向力、法向力和俯仰力矩系数随 Ma 变化的比较，图中包括按空气动力手册 OADB 所作的工程估算(带有不确定性的误差范围)，飞行试验数据和两种 CFD 计算的结果(按理想气体计算羽流和按变气体常数计算

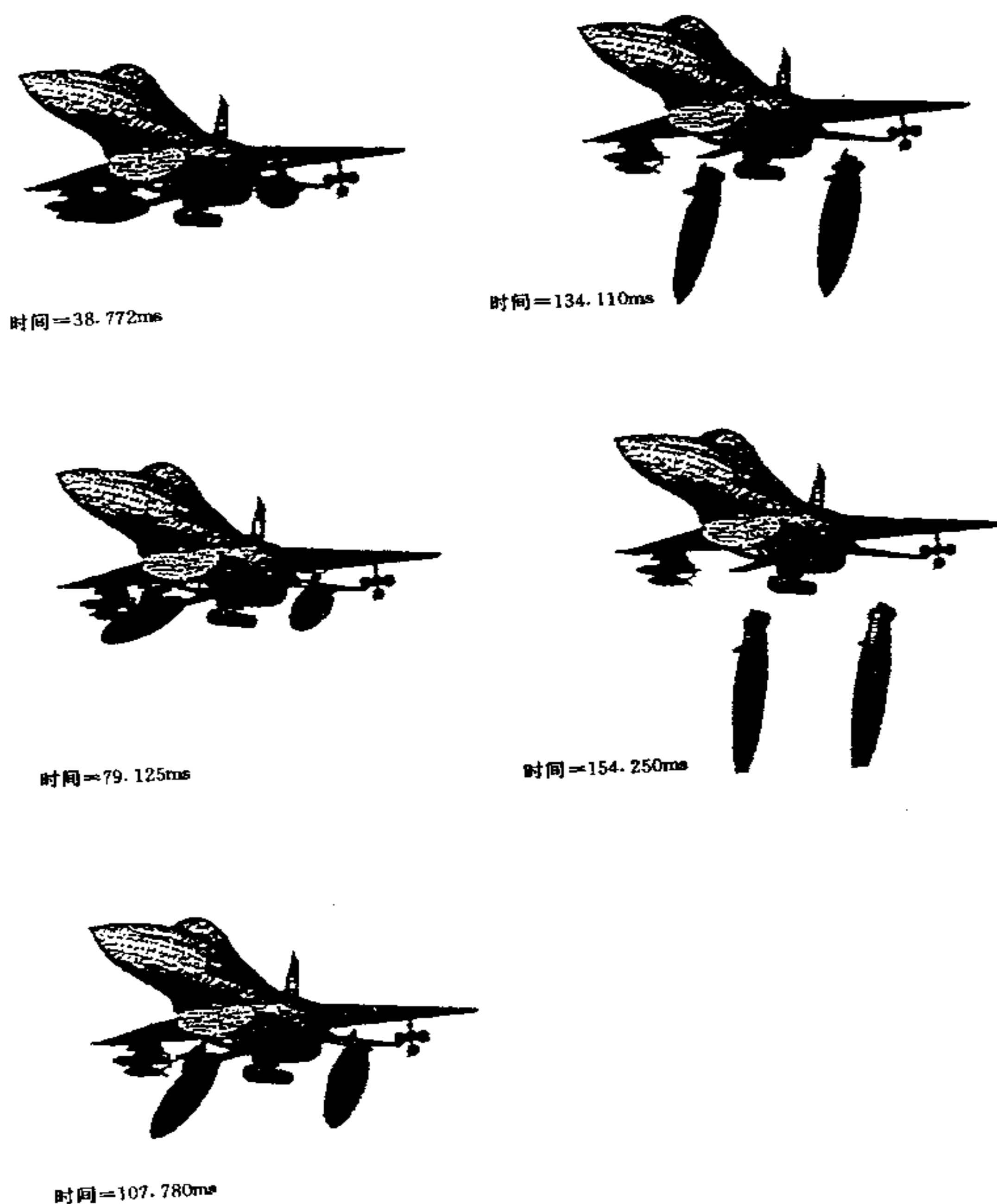


图 7-26 不同时刻的表面网格和相对姿态

羽流），由图可见均吻合得很好。图 7-30 给出了轨道器（航天飞机）机翼不同展向位置上压强分布的比较，计算结果和飞行试验数据的吻合程度令人十分满意。Dominik 等[20]也采用 ICEM 和 GRIDGEN 软件对 SSLV 外形生成了分区对接网格，并利用一些服务性软件将小区合并成大区，生成了共 237 区近 500 万个网格点的网格。

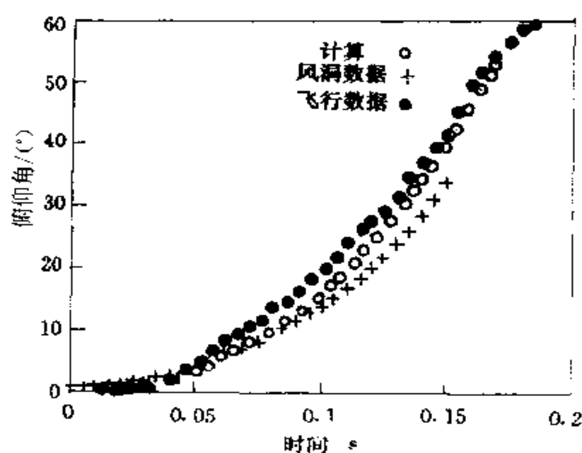


图 7-27　俯仰角随时间变化的比较

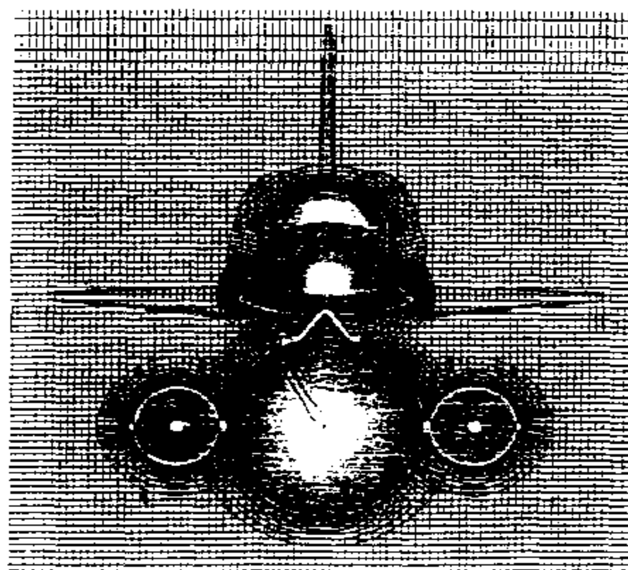


图 7-28　SSLV 的重叠网格示意图

第七节　操纵面偏转时三维绕流的计算

偏转操纵面(副翼和襟翼)时机翼上气动力的确定一直是飞机设计面临的一个重要而又困难的课题。其重要性在于它不仅决定着外载荷的大小，影响着飞机的结构设计及重量，也直接影响着操纵面的气动效率和偏转操纵面时机翼的气动特性，因此良好的操纵面将提供飞机优良的机动性能和起飞、着陆性能；正确地确定操纵面上的压强分布，可优化选择助力器的功率和操纵方式，实现良好的操纵性。其困难在于绕偏转操纵面时机翼的流动是很复杂的，包含众多流体力学中复杂粘性流动的现象，增加了分析流动特性的难度。长期以来缺乏分析复杂非线性绕流的工具。风洞实验不可能完全模拟真实飞行情况，使风洞测出的舵面气动特性与真实飞行的有差距，而目前尚无正确的模拟准则将实验数据修正扩展到飞行状态。过去在工程应用方面主要是通过在实验的基础上经过试

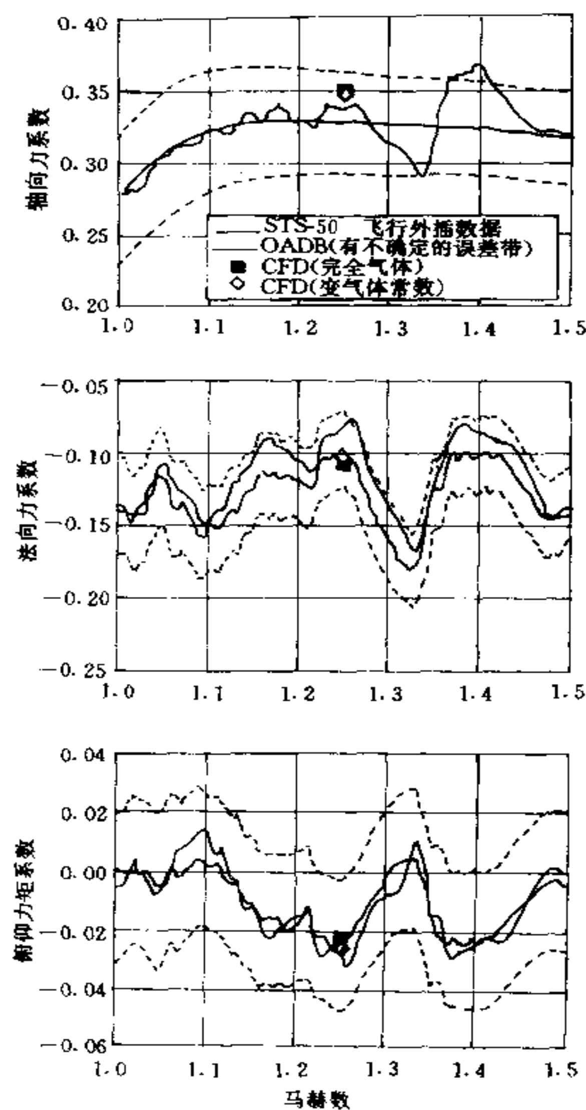
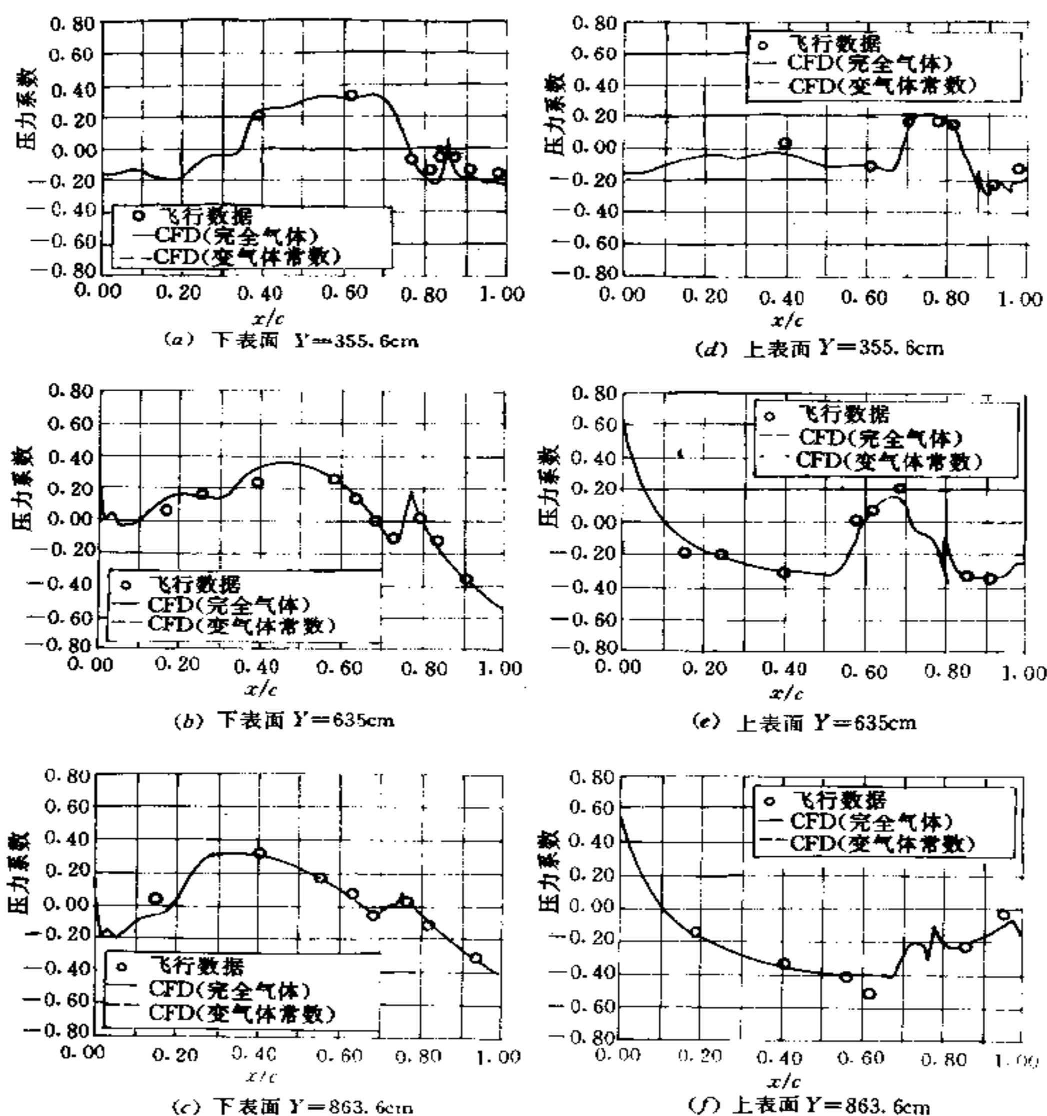


图 7-29 轴向力、法向力和俯仰力矩的比较

飞的校核以及系列型号的经验积累解决这一课题，计算机和计算流体力学的发展使数值模拟有望成为解决此类复杂流动问题的一种强有力的手段。

上节介绍的 SSLV 计算也对航天飞机机翼升降副翼的铰链力矩作了数值模拟和飞行试验的对比，图 7-31 为其比较结果，令人十分鼓舞，两者吻合得很好。

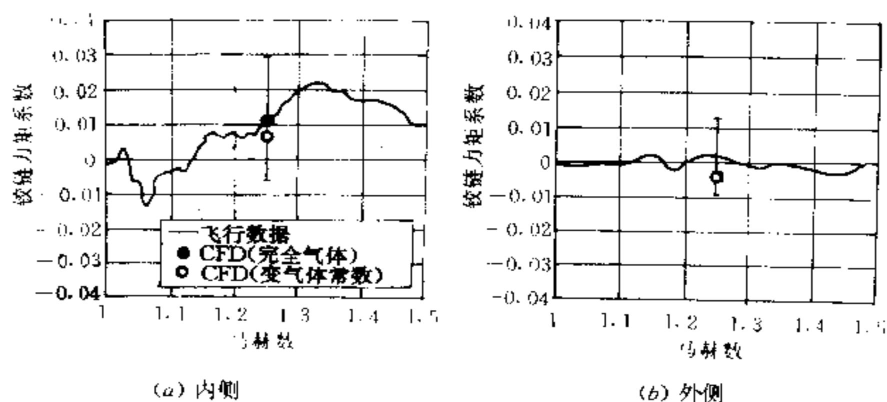


(a) 下表面 Y=355.6cm (d) 上表面 Y=355.6cm

(b) 下表面 Y=635cm (e) 上表面 Y=635cm

(c) 下表面 Y=863.6cm (f) 上表面 Y=863.6cm

图 7-30 航天飞机机翼不同展向位置上压强分布的比较



(a) 内侧 (b) 外侧

图 7-31 铰链力矩的比较

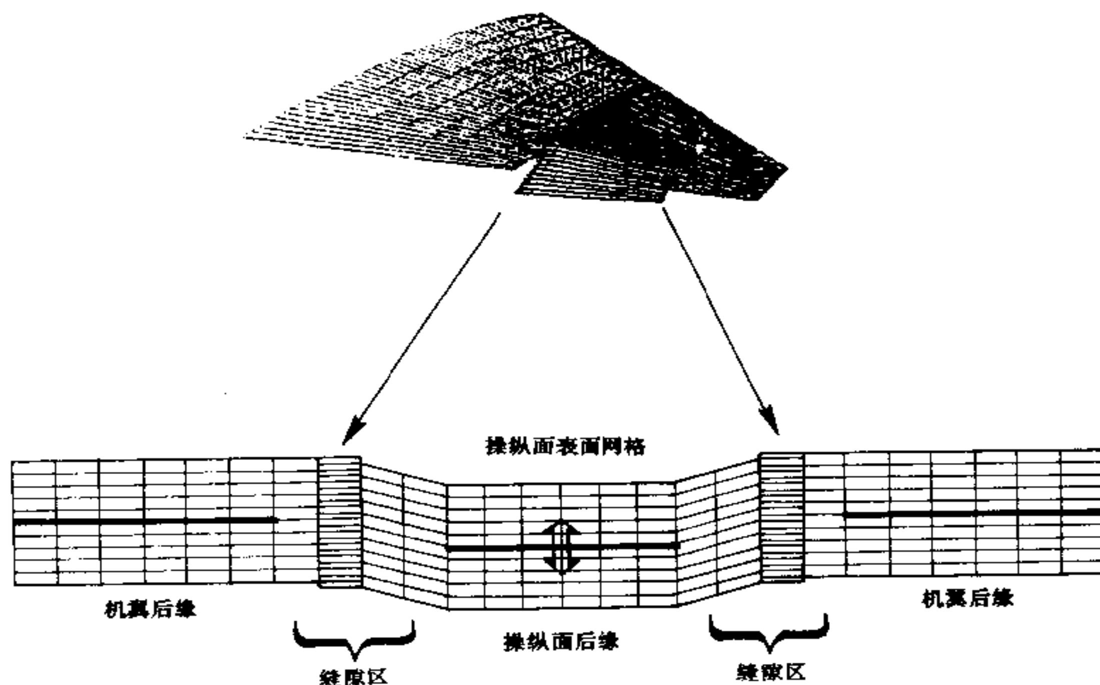


图 7-32　计算外形和分区网格示意图

Obayashi 等对带副翼的三维机翼作了定常和非定常的薄层 N-S 方程数值模拟[21]，三维机翼的几何外形和实验数据取自文献[22]。图 7-32 给出了计算外形和所取网格的示意图。为使分区对接网格构造方便，在舵面与机翼间人为地引入了一个小的缝隙区。计算对比了单区和分区网格的计算结果，单区计算采用 151×44×34 个网格点，分区计算各区网格点数分别为 151×13×34，151×15×34 和 151×20×34。单区与分区网格计算的结果很吻合。文献[21]还给出了副翼前缘与机翼间的缝隙区被封死的情况下非定常计算结果与实验数据的比较，两者吻合较好。

李津等也对上述带副翼的三维机翼绕流作了分区对接网格和 Euler 方程的数值模拟[23]。计算的分区网格由 4 个区组成，即构成三维机翼 OH 型整体网格拓扑的机翼内翼段、外翼段(包括主侧向远场边界的流场区)和带副翼的机翼段三个区，以及副翼前缘与主翼间的缝隙区。各区计算网格点数分别为：160×7×25，160×8×25，160×15×25，及缝隙区为 6×8×20。图 7-33 为网格分区的示意图。在交界面处采用了通量加权插值方法，从而使分区网格在交界面处实现通量守恒。计算采用半离散的有限体积方法离散 Euler 方程；空间离散使用了 Van Leer 矢通量分裂格式，利用 MUSCL 方法实现了计算格式的二阶精度，构造了一种限制器函数使格式具有 TVD 性质[24]；时间方向上采用 ADI 隐式时间推进方法。图 7-34 给出了 $Ma_\infty=0.9, \alpha=0°, \delta=6°$时两种数值模拟结果[21，23]的比较，可见两种结果很吻合一致。图 7-35 给出了 $Ma_\infty=0.9, \alpha=3°, \delta=0°$和 6°时，文献[23]计算的上翼面压强分布和实验结果[22]的比较，由图可见两者变化趋势是一致的。为了和实验模型一致，上述计算中都把副翼前缘的缝隙区封死，图 7-36 给出了有无缝隙时计算的压强分布的比较[23]。多段翼型三维机翼的绕流远比带副翼的机翼绕流更为复杂，第五章曾对二维多段翼型绕

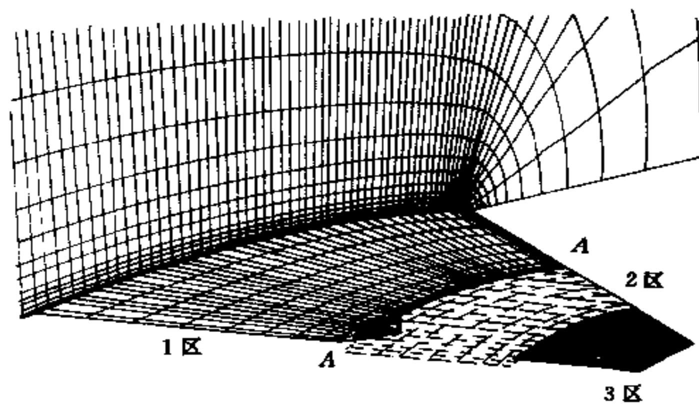


图 7-33　网格分区的示意图

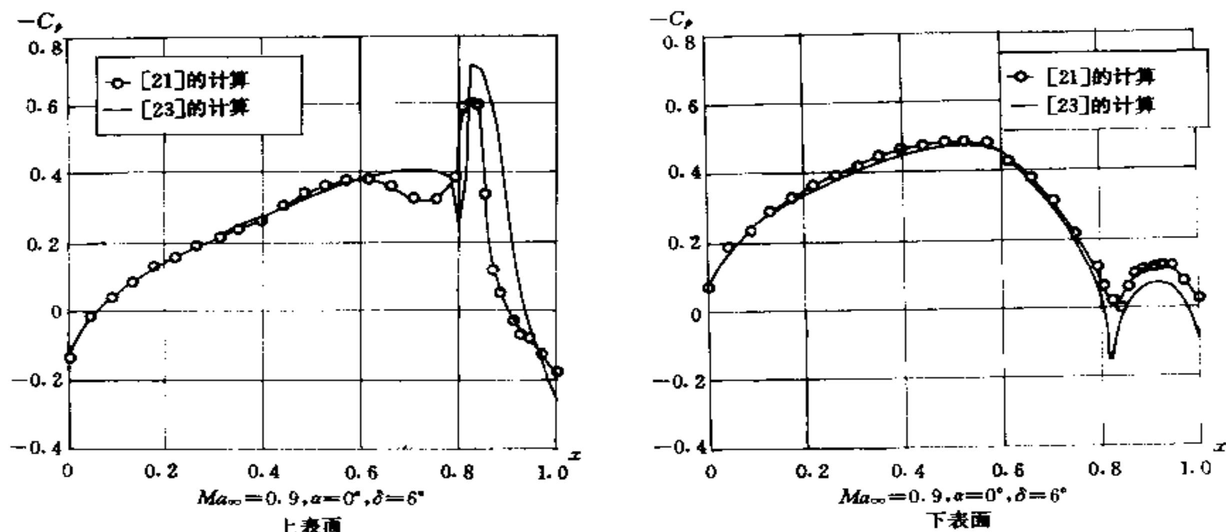


图 7 34　两种数值模拟结果的比较

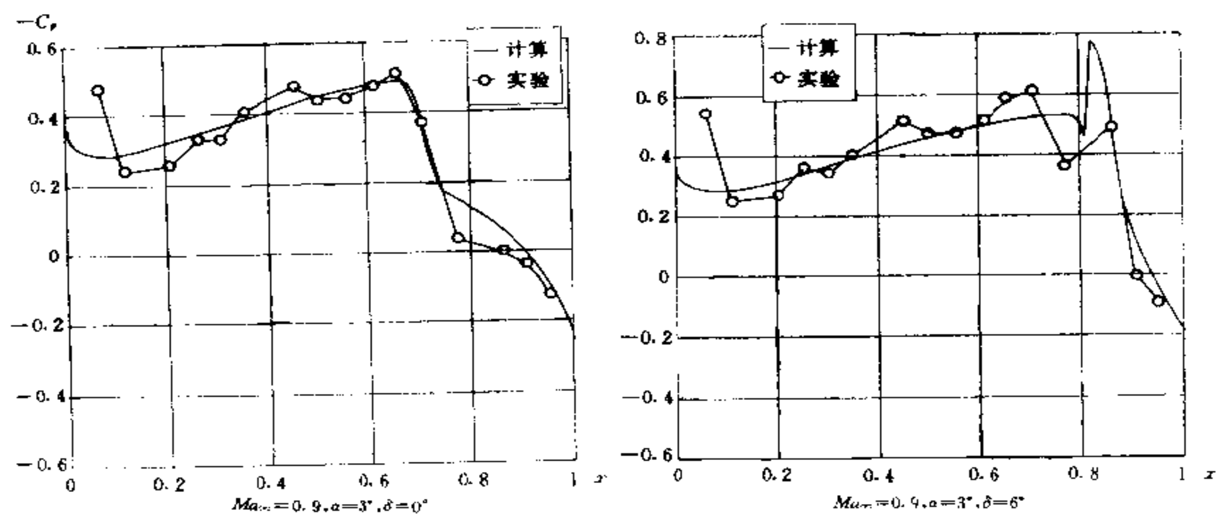


图 7-35　机翼上翼面压强分布计算和实验结果的比较

流的数值模拟情况及湍流模型的影响作了介绍，可以认为二维绕流的问题已基本解决，但三维绕流问题的研究正处于起步阶段。作为一个例子，图 7-37 给出了 T-39 机翼和副翼的流体质点轨线图[25]。目前各国正致力于将数值模拟和风洞实验相结合来解决此类三维绕流问题。

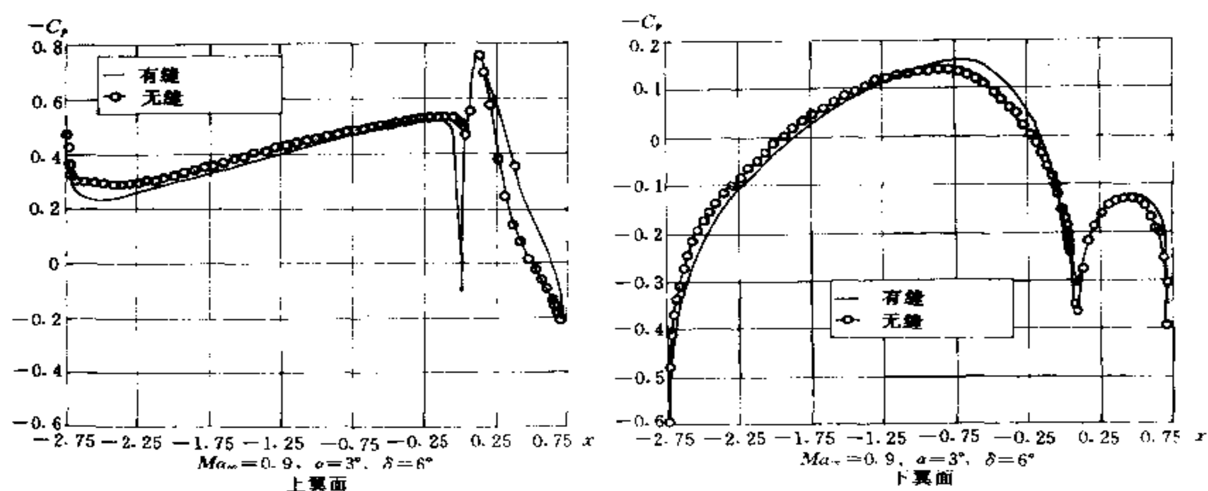


图 7-36　副翼前缘有无缝隙压强分布的比较

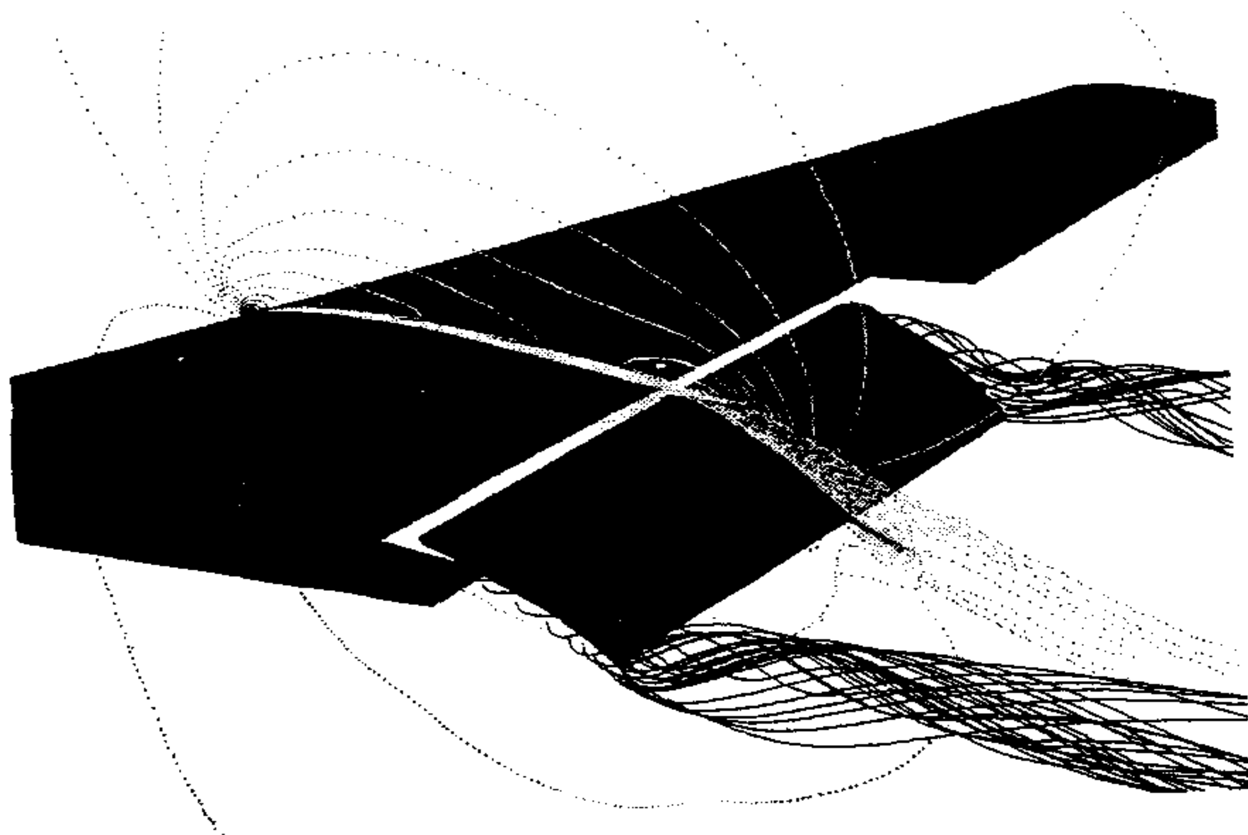


图 7-37　T-39 机翼和操纵面绕流的流体质点轨线图

第八节　导弹流场的数值计算

有翼导弹是区别于飞机的另一类型飞行器，通常具有多翼面细长体外形，多在超声速、高超声速下飞行，飞行迎角往往可达 30°～40°。现代导弹更强调具有小操纵面和高机动性，因而导弹的绕流流场也很复杂，包含激波、边界层分离、旋涡、强非定常等物理现象及这些现象间的相互作用。

对导弹某些气动状态，如高超声速飞行、大迎角、弹头弹体分离、子母弹抛撒等，用风洞实验难以研究，而用数值模拟方法分析研究则远比风洞实验方法要经济快速。

用数值模拟方法求解 Euler 或 N-S 方程来研究导弹的流动和气动力问题还只有十多年的历史。1988 年 Hoeijmekers 综述了 CFD 在导弹气动研究中的应用[26]。90 年代以后，Ekaterinaris 采用 OVERFLOW 解算器[11]，Chimera 重叠网格技术和 Baldmin-Lomax 湍流模型计算了如图 7-38 所示的导弹外形的绕流[27]（该图也给出了计算网格的示意图），计算的流动状态为 $Ma_\infty=0.3$，$\alpha=45°$，$Re=0.95\times10^5$，前舵偏角 $\delta=10°$，图 7-39 给出了计算的流场旋涡系统和螺旋度密度线的分布，在 $\delta=20°$时计算的法向力系数 $C_N=34.1$，$C_M=-76.5$，与相应的实验值 $C_N=32$，$C_M=-80$ 吻合较好。

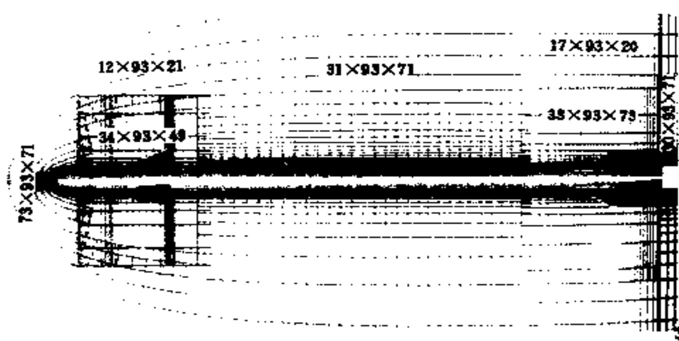


图 7-38　导弹几何外形及计算网格示意图

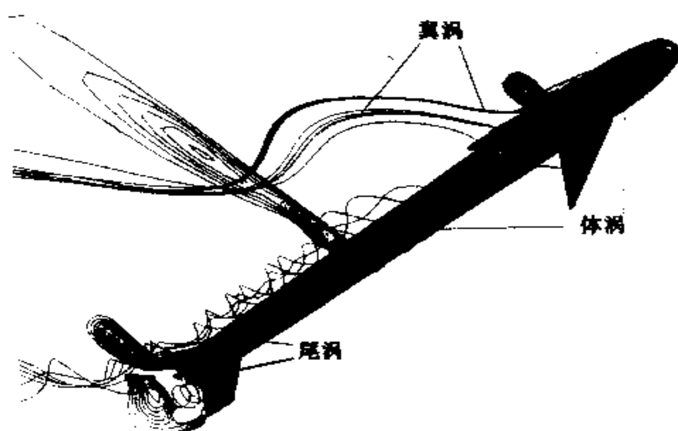


图 7-39　计算的流场旋涡系统和螺旋度密度线

Streit 采用 CEVCATS 计算程序对具有 8 片尾翼的导弹进行了求解 Euler 和 N-S 方程的数值计算[28]。图 7-40 为该导弹的几何外形与表面网格的示意图。计算程序使用 Harten-Yee 迎风

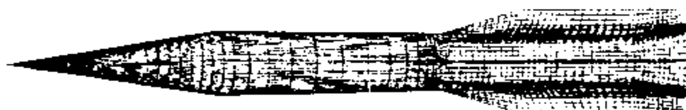


图 7-40　几何外形和表面网格图

TVD 数值格式和 Runge-Kutta 显式时间推进方法，采用多块网格技术，求解 Euler 方程时取了 71 万个网格点，求解 N-S 方程时取了 160 万个网格点。图 7-41 给出了在 $Ma_\infty=3.0$ 时计算和实验的法向力、轴向力和俯仰力矩系数值随迎角变化的比较，由图可见，N-S 方程计算的结果和实验数据吻合得很好，Euler 方程计算的法向力和俯仰力矩值与实验数据也很吻合。

闫超等采用改进的 Jameson 显式中心差分格式方法求解 N-S 方程计算了如图 7-42 所示导弹的绕流流场[29]。方法的改进包括：引入了类 TVD 开关函数和变尺度因子人工粘性系数，采用了变系数隐式残差平滑技术等。计算中也应用了分区技术和 Baldwin-Lomax 湍流模型。计算网格点数为 52 万。表 7-2 给出了 $Ma_\infty=2.5$，$Re=2.78\times10^5$，迎角 $\alpha=10°$和 14°时法向力及俯仰力矩系数计算值和实验值的比较。可见 C_N 误差在 2%以内；C_M 误差在 6%以内。图 7-43 给出了对称面上计算的等马赫数线分布，图 7-44 给出了尾翼处横截面上的等密度线分布（迎角 $\alpha=10°$）。

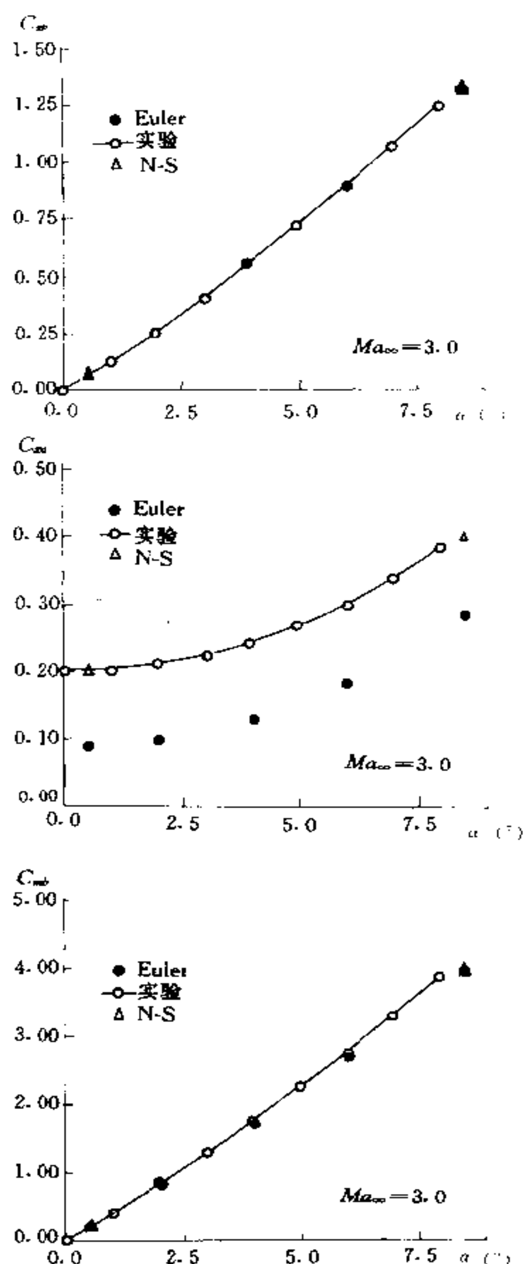


图 7-41　空气动力系数计算与实验数据的比较

a，法向力　b，轴向力　c，俯仰力矩

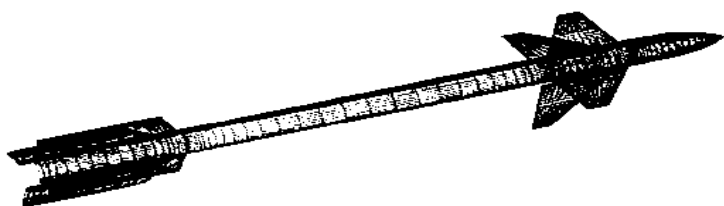


图 7-42　几何外形和表面网格图

表 7-2

	C_M		C_N	
	实验	计算	实验	计算
$\alpha=10°$	4.78	5.05	6.6	6.74
$\alpha=14°$	11.19	11.88	10.1	10.28

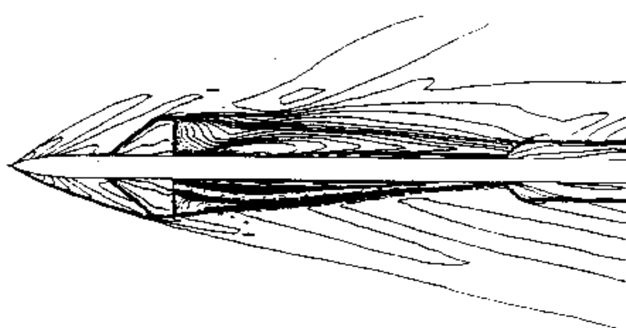


图 7-43　对称面上等马赫线分布

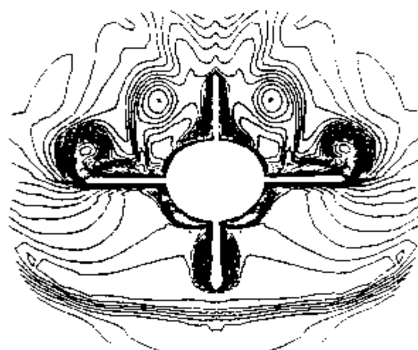


图 7-44　尾翼处横截面中的等密度线分布

第九节　结束语

一、计算流体力学在航空航天领域中应用的地位与作用

上述各节的应用实例充分说明数值模拟方法在航空航天领域中应用的地位正在不断上升，作用正日益扩大。随着计算流体动力学与计算机技术的飞跃发展，目前正在研制集网格生成、流场求解、数据可视化等于一体的完整的软件系统，以形成“流体动力学分析的完整环境(Flow Analysis Software Tooklit——FAST)”，并在此基础上发展一种计算的“虚拟风洞(Virtual Wind-tunnel)”技术，使人们可以在巨大的计算数据中“游飞”，获得显示风洞吹风实验时在实验段中观察到的流动状态的效果，这必将使数值模拟方法在航空航天领域中的应用以更大的比例取代风洞实验。

Northrop 公司在研制新一代 ATF 的 YF-23 及其上一代型号 YF-17 进程中风洞实验作用减少的情况可作为一个实例表明数值模拟和风洞实验在现代战斗机设计中地位和作用的相对变化。从 1966 年至 1974 年(第一次试飞)YF-17 的研制期间，共进行了近 13 500 小时的风洞实验，而从 1982 年到 1990 年(第一次试飞)对性能要求更高、外形更复杂的 YF-23 的研制期间，由于数值模拟

方法参与了设计及修改，用了近 15 000 小时的机时，而使风洞实验只进行了近 5 500 小时，减少了约 60%的实验工作量，缩短了研制周期，节省了大量费用，并获得了优异的设计性能[30]。

图7-45 给出了 CFD 与风洞实验在现代民机设计中所占比重的发展趋势[31]。预计随 CFD 与计算机的持续发展，CFD 在未来超声速民机(HSCT)研制中将占更大的比重，尽管由于适航要求的提高、推进系统的变化等对风洞实验的需求也会有所增加。图 7-46 给出了计算和实验的结合情况与型号设计中空气动力研究所需费用两者关系的估计，可见随 CFD 使用比重的增加(约占 2/3)，费用将趋于极小值。随后又逐渐增加，这表明当需要研究的更复杂现象增多时，即使大量化费在 CFD 上也不可能由 CFD 提供成功设计一架飞机所需的全部信息，只有巧妙地、有机地结合 CFD 与风洞实验才能花费最少。将来应努力使 CFD 解决空气动力问题所占的比重由目前的 40%左右上升至 66%这一最优值。

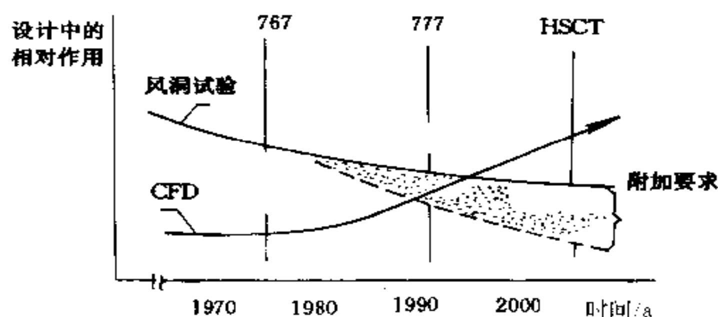


图 7-45 CFD 和风洞实验的关系变化

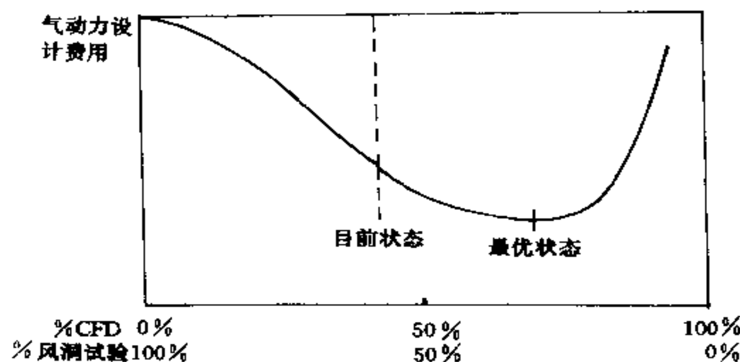


图 7-46 空气动力设计中 CFD 和风洞实验的相对费用

二、程序验证和确认是使数值模拟方法成为有效计算工具的必要条件

计算流体动力学的应用包括方法的研究、技术的转化、设计与发展等三个阶段。前已指出，构成应用流体力学计算软件的四个基本要素是：计算格式和方法、几何描述和网格生成技术、湍流模型以及可视化技术等。构成软件还只是方法研究的阶段，所形成的计算软件还必须经过全面的实验数据验证，并对数值模拟本身的各种误差作综合检验以证明其精度和可靠性。这种包括确认和应用研究的技术转化阶段是绝对必须的。为此，一方面必须专门设计一些特定的地面模拟实验，如包含有

动失速、涡的形成、部件抖振等现象的实验，以提供检验计算结果的实验数据，进而找出计算模拟中物理假设的不足，并确定其影响程度，提出对物理模型的改进并给出其使用条件和范围。另一方面，在验证过程中必须注意计算结果对不同几何处理、不同网格数目与分布、不同数值方法等的精度差别及计算结果的重复性。由上述两方面研究工作组成的确认过程和直接的应用研究组成了技术转化过程。只有完成从研究的模态转化到设计和发展的进程，才能使CFD形成为生产力，直接为工程应用服务。

图7-47和图7-48分别给出了美国NASA 92财政年度各部分研究人员及经费的分配情况[32]。可以看出，"确认"所占用的研究人员占研究人员总数的32.8%，研究经费占研究总经费的52.6%，充分表明了"确认"工作的重要性。

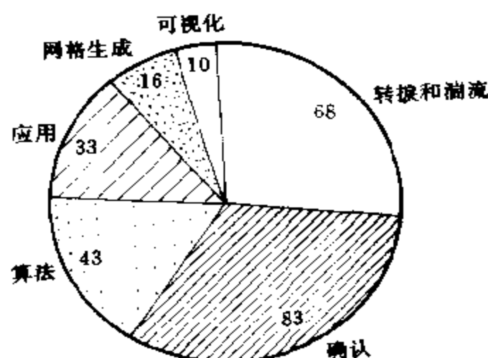


图7-47 美国NASA 92财政年度研究人员分配状况(人)

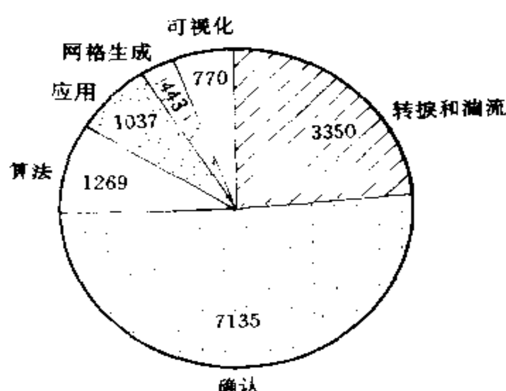


图7-48 美国NASA 92财政年度研究经费分布状况(千美元)

NASA/AMES的F-18(HARV)大迎角研究项目是说明确认和应用研究重要意义的另一个实例。该项目组对装备了大量先进测试仪器的F-18进行了大量试飞、水洞和风洞实验以及相应的数值模拟。数值模拟计算包括对称流动、带侧滑的非对称流动、与结构分析耦合的立尾抖振分析、机头区缝隙吹气喷流的气动控制流动、飞机外流和进气道内流的一体化计算等。将这些计算结果与所进行的地面实验及飞行试验的结果进行充分的对比，结果的十分吻合一致才使人们有了充分的信心将雷诺平均N-S方程的数值模拟方法用于未来的飞机设计中去。结果的对比还说明，为更好地实现这一目的，还必须①进一步开展CFD与其他学科的耦合计算；② 提高计算资源的能力。计算结果与飞行试验结果的某些差异的原因之一正在于网格还不够精细；③ 加强对湍流模型的研究。在局部复杂分离流动区域中，如头部吹气气动控制装置附近的分离流、内流的三维扩压管道流动的局部分离区域等，正是由于目前湍流模型的不完善而使计算结果与实验结果相比还存在着某些差异。

三、发展大规模并行计算的有效算法

现代飞机的外形日益复杂，其流场计算对网格数目的要求也越来越高。外形的复杂使建立单域的结构化计算网格极为困难，甚至不可能；网格数目的增加使单台计算机的内存和计算速度不敷需要。向量化结构为主的巨型机的出现显著地提高了单机的计算能力。正如第一章中已指出的，虽然根据已有的几十个常规应用软件的统计，60%～88%左右的标量计算可以被向量化，且向量计算的加速比一般可达4～8，但对于超大型计算问题，如粘性流动计算在航空航天领域中的应用，所需加速比的提高是以数量级为单位的，单纯依靠计算机单机性能的提高毕竟潜力有限。图7-49表示了

巨型机和单处理器近年来的发展趋势。可以看出，近十年来巨型机的计算能力有了将近一个量级的

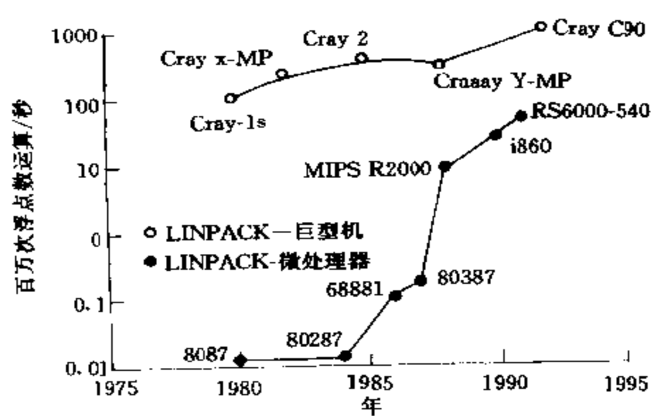


图 7-49 巨型机和微处理器性能发展的比较

提高，而基于超大规模集成电路技术的微处理器的性能则在 1987 年左右发生了质的飞跃。有人估计，微处理器性能的改善在近 6～7 年内将以 1.5 倍～2 倍/年的速率增长，因此到 2000 年单处理器的总体性能可能达到 10 亿次/秒(1GFLOPS)。这就使计算界普遍有一种信念，即由大量微处理器组成的大规模并行系统的计算机(Massive Parallel Processor——MPP)在本世纪末将会达到亿万次/秒(T FLOPS)量级的计算水平，并能实现所谓科学与工程计算巨大挑战的应用(Grand Challenge Applications——GCA)。为使计算的飞行器表面压强、热传导率和气动特性等能达到工程需要的精确度，航空航天领域中 CFD 外流流场计算模拟的 GCA 可简单地归纳为：5 000 000 个网格点，5 000 迭代次数，5 000 次运算/点/迭代及 10^{15}运算/问题。

表 7-3 与表 7-4 分别给出了不同计算模态及学科交叉耦合计算对计算时间和计算机的要求[32]，可见，计算机必须达到内存 Gword 和计算速度 TFLOPS 的量级。通常的巨型机，即使考虑到其发展，也是无法实现 CFD 的 GCA 要求的。区域分解、并行化、大规模并行机和网络连接并行机群是 90 年代中期以至 2000 年计算流体力学发展的方向。MPP 的发展速度及其潜力使人们增强了实现 GCA 的乐观性。计算科学与 CFD 的这种巨大发展，必将对未来 CFD 在工业界的应用起到难以预料的作用。然而在 MPP 系统中采用目前已有的计算方法进行计算只能使计算效率达到其峰值的 10%左右[33]，这说明为适应 MPP 的发展，人们必须大力探求相应的有效计算方法。美国一项新的 FY-22 国家高性能计算和信息规划中就规定了 NASA 将着重研究和研制大规模并行计算机上的 CFD 计算方法。

表 7-3 不同计算模态对计算机的要求

计算模态	允许的计算机时	所要求的计算机性能(GFLOPS)
预　研	1 000～100	0.3～3
设　计	10～1	30～300
自动设计	0.1～0.01	3 000～30 000

表 7-4 学科交叉的计算对计算机的要求

交叉学科	Mwords	GFLOPS
基本 CFD	200	60
热结构	×2	×2
推进系统		
进气道/喷管		
流场模拟	×2	×2
发动机性能	×2	×2
控制		
控制规律一体化	×1	×1
推力矢量控制	×2	×2
总和	2,000	600

并行计算研究中的另一个重要方向是"可扩展并行机群系统"中的并行计算方法。近年来相应地出现了一些网络并行计算的软件平台如 PVM,MPI 等,加速了基于整机模块规模的可扩展多计算机系统的并行计算研究。此发展方向的重要优点之一是可以充分发挥工作站的使用效率。据 1993 年估算[34]工作站一般都用于前、后置处理,因而一台普通工作站(如 2MFLOPS～10MFLOPS 计算速度和 64MB 的内存)在一周工作时间内只使用到 20%的 CPU 时间,即只工作 8 CPU 小时,闲置 160CPU 小时,可见工作站的使用潜力是巨大的。

波声 777 飞机的无图纸设计标志着飞机设计中的一个巨大飞跃,其基础是基于网络连接的工作站和 CAD/CAM 软件。麦道公司的 F/A-18E/F 型号组也建立了 180 台工作站的网络系统,客观上为流场计算提供了强大的计算基地(特别是计算机的业余闲置为 CFD 提供了良好的计算环境),他们在下班后的机器闲置时间以 10-15 台工作站为一组完成一种情况的计算来进行 CFD 的计算,在不到 5 个月的时间内实现了相当于巨型机 8000 个 CPU 小时的计算[35],其经济效益十分可观。他们在针对飞机外形的局部微小变化对飞机性能影响的研究中做到了将全机流场区域分解成 60 区,总计近 5 000 000 个网格点,在网络连接的工作站群上利用 PVM 对阻力的计算达到了±1 count(1 count$=C_d=0.0001$)的收敛精度,计算结果与随后的风洞实验结果吻合得很好[36]。李津等在我国自行研制和发展的基于总线桥多机互连协议的异构型可扩展并行机群(BBP-SPC)上对轴对称钝头倒锥体外形的流场作了并行计算[37],在我国并行计算技术在 CFD 中的应用方面迈出了可喜的一步。

四、计算流体力学中的计算可视化问题

计算机性能的不断迅速提高为计算流体力学进行复杂流场的数值模拟提供了广阔的前景,随之而来的是另一矛盾的尖锐化,即如何使用户能够分析、判断和理解计算过程中所产生的浩如烟海的数值结果。解决这一矛盾只能是借助计算机的图形处理能力,实现计算可视化,将数值模拟中产生的数字信息转变为直观的、易为用户理解的、可进行交互分析的、以图象形式表示的静态或动态画面。

计算流体力学所要求的可视化功能可概括为:用适当的图形方式显示出流场中各类物理量的分布;能对画面进行缩放;可交互地改变视点位置;可随时变更颜色与其索引之间的对应关系并实

时地反映在物理量的图形表示上；提供对三维场可按任意角度进行切片的功能；有画面迭加和透明控制能力；有消隐和表现多光源光照效应的能力；有体素绘制能力；能实现动态显示；具有驾驭式的计算可视化，即不仅能实时地以图形形式显示计算结果，且给用户提供实时干预计算进程的能力[38]。

实现计算可视化的基础仍是计算机的硬件和相应的软件系统。硬件中图形工作站无疑起着主要作用。图形工作站强调其图形处理速度和图形显示质量，图形处理速度通常以一秒钟内可处理并显示的三维矢量个数和三维填充多边形个数来衡量；图形显示质量则以屏幕的分辨率和同屏画面上颜色的分辨率来比较。近年来已出现了很多高档图形工作站。实现可视化的软件应具有(1) 实现可视化分析所需的大部或全部功能；(2) 直观友好的人机界面；(3) 可扩展性，用户能根据需要增加新的功能。80 年代以来许多研究单位都致力于发展此类软件，如 NASA 的 PLOT3D，GAS (Graphical Animation System)，Surf(Surface modeler)等。近年来已出现了多种类型的商品化可视化软件，如 AVS(Application Visualization System)，Wave Front 等，都具有很强的功能。AVS 是以功能模块为基础，采用面向对象的软件开发方法构成的一个框架式系统，除提供用于分析图象、几何表面和三维体素数据场的子系统外，还提供程序框图编辑子系统，让用户通过可视化程序设计语言交互直观地从模块库中选取模块，构造满足自己特定需要的可视化软件。模块库中的模块还可由用户自行定义补充。

随计算技术和计算流体力学的迅速发展，计算可视化将沿下述方向发展[38,39]：(1) 具有巨大计算能力与图形处理能力相结合的高性能工作站日益增多；(2) 图形处理算法更多地由硬件实现，驾驭式可视分析方式流行，可视化软件被包含在工作站的基本软件系统中提供给用户；(3) 人工智能技术应用于流场分析；(4) 多媒体技术应用于流体计算的分析、交流、演示和培训。

参 考 文 献

[1] Ying S X, Steger J L, Schiff L B, Baganoff D. Numerical simulation of unsteady viscous high angle of attack flow using a partially Flux-Split algorithm. AIAA 86 2179

[2] Cummings R M Rizk Y M, Schiff L B, Chaderjian N M. Navier-Stokes predictions for the F-18 Wing and Fuselage at large incidences. J. of Aircraft, 29:565-574, 1992

[3] Gee K, Rizk Y M, Murmann S M. Analysis of a Pneumatic forebody flow control concept about a full aircraft geometry. AIAA 92-2678

[4] Rizk Y M, Guruswamy G P, Gee K. Numerical investigation of tail buffet on F-18 aircraft. AIAA 92 2673

[5] Kwon O J, Sankar L N. Viscous flow simulation of a fighter aircraft. J. of Aircraft 29:886-891, 1992

[6] Cosner R R. Integrated flow field analysis methodology for fighter inlet. AIAA 85-3071

[7] Mysko S J, Chyu W J, Stortz M W, Chow C Y. Navier-Stokes simulation of external/internal flow on the forebody/inlet of AV 8B Harrier Ⅱ. AIAA 93-3057

[8] Murmann S M, Rizk Y M, Schiff L B. Coupled numerical simulation of the external and engine inlet flows for the F-18 at large incidence. AIAA 92-2621

[9] Acheson K E, Lehman S E, Smith T D. Design optimization study for F-15 propulsion/forward faring compatibility. AIAA 93-3484

[10] Banger L H, Johnston L E, Schoop M J. CFD application in F-22 design. AIAA 93-3055

[11] Buning P G, Chan W M. Overflow/F3D user's mannual. NASA Inter. Mem, 1991

[12] Smith M H, Chawla K, Van Dalsem W R. Numerical simulation of a complete STOVL aircraft in ground effct. AIAA 91-3293

[13] Deslandes R. A grid overlapping technique with smart monoblocks for unsteady, time accurate Euler solutions applied to

store separation problems. AIAA 94-0055
[14] Gillyboeuf J P, Mansuy P, Pavsic S. Two new Chimera methods: Application to missile separation. AIAA 95 0353
[15] Welterlen T J, Karman Jr S L. Rapid assessment of F-16 store trajectories using unstructured CFD. AIAA 95-0354
[16] Baum J D, Hong Luo, Löhner R, Goldberg E, Feldhun A. Application of unstructured adaptive moving body methodology to the simulation of fuel tank separation from an F-16 C/D fighter. AIAA 97-0166
[17] Pearce D G, Stanley S A, et al. Development of a large scale Chimera grid system for the space shuttle launch vechicle. AIAA 93-0533
[18] Gomez R J, Ma M C. Validation of a large scale Chimera grid system for the space shuttle launch vehicle. AIAA 94-1859
[19] Slotnick J P, Kandula M, Buning P G. Navier-Stokes simulation of the space shuttle launch vehicle flight transonic flowfield using a large scale Chimera grid system. AIAA 94-1860
[20] Dominik D, Wisneski J, Rajagopal K, Vuong S, Sikora J. Grid generation of a high fidelity complex multibody space shuttle mated vehicle. AIAA 93-0432
[21] S Obayashi, Guruswamy G P. Navier Stokes computations for oscillating control surfaces. AIAA 92-4431
[22] Hess R W, Cagier Jr F W, Wynne E C. Steady and unsteady transonic pressure measurements on a clipped delta wing for pitching and control surface oscillations. NASA TP 2594, 1986
[23] Li Jin, Zhu Ziqiang, Chen zemin, Li Zhongze. The Euler solution of a 3-D wing with Aileron. The third international conference on fuid mechanics, July 7-10, 1998, Beijing, China.
[24] Li Jin, Chen Zemin, Zhu Ziqiang. New limiters applied to flux vector splitting schemes. 计算物理, 14: 297-304, 1997
[25] Rogers S E. Progress in high-lift aerodynamic calculations. AIAA 93-0194
[26] Hoeijmakers H W M. The role of computational fluid dynamics in missile aerodynamics. Proceedings of the NEAR Conference on Missile Aerodynamics, Oct. 1988, California
[27] Ekaterinaris J A. Analysis of flowfields over missile configurations of subsonic speeds. J. of Spacecraft and Rockets 32 (3): 385-391, 1995
[28] Streit T. Euler and N-S solutions for supersonic flow around a complex missile. J. of Spacecraft and Rockets 31(4): 600-608, 1994
[29] 闫超,陈靓. 导弹复杂流场及气动力(热)的 N-S 方程数值计算. 宇航学报 19(3):19-24,1998
[30] Busch R J. Computational fluid dynamics in the design of the Northrop/McDonnell Dougles YF-23 ATF Prototype. AIAA 91-1627
[31] Bengelink R L, T W Pureell. The value of a computation/experimental partnership in aerodynamic design. ICAS 92-4. 3. 2. 1992
[32] Bailey F R, Simon H D. Future directions in computing and CFD. AIAA 92-2734
[33] MacCormack R W. A perspective on a quarter century of CFD research. AIAA 93-3291
[34] Smith M H, Pallis J M. MEDUSA——an overset grid flow solver for network-based parallel computer systems. AIAA 93-3312
[35] Bush R H, Jasper D W, Parker S L, Romer W W, Willhite P G. Computational and experimental investigation of F/A-18E sting support and afterbody distortion effects. J. of Aircraft, 33: 414-420, 1996
[36] Willhit P G, Jasper D W, Romer W W. A critical evaluation of CFD predictions of full aircraft drag increments. AIAA 95-2289
[37] 李津,李忠泽,朱自强,陈泽民,吴子牛. 分区并行跨声速流的计算. 第八届全国计算流体力学大会论文集,1996
[38] 李德元,金其杰. 计算流体力学的可视化问题. 第六届全国计算流体力学大会论文集,1992
[39] Edwards D E. Scientific Visualization: Current trends and future directions. AIAA 92-0068